COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - III appello a.a. 2021–2022

23 giugno 2022

Esercizio 1

SI consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema ammette un'unica soluzione.
2. Determinare le condizioni di convergenza per i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel e, la relazione fra la velocità asintotica di convergenza dei due metodi, in caso di convergenza.
3. Nel caso particolare in $\alpha = \frac{1}{2}$, posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, eseguire tre iterazioni del metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 2

Per approssimare

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

si consideri la formula di quadratura aperta con $n = 3$

$$I_3^A(f) = \alpha_0 f\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \alpha_3 f\left(\frac{2}{3}\right)$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, 2, 3$.

1. Si calcolino α_0 e α_3 in modo da ottenere il massimo grado di esattezza.
2. La formula di quadratura ottenuta è di tipo interpolatorio?
3. Calcolare il grado di esattezza.
4. Si utilizzi la formula ottenuta per approssimare l'integrale di $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ utilizzando 4 cifre per la mantissa e si calcoli l'errore commesso.

Esercizio 3

Per approssimare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \qquad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con f(t,y) lipschitziana in y con costante di Lipschitz L, si consideri il seguente metodo numerico

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_{i-2} + \frac{h}{4} \left[3f(t_{i+1}, u_{i+1}) \;\; + 9f(t_{i-1}, u_{i-1})\right] \qquad i = 0, \ldots, n-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

1. Determinare l'ordine di consistenza del metodo.
2. Dimostrare che il metodo è zero-stabile.
3. Dire se il metodo è assolutamente stabile se applicato al problema modello con $\lambda = -8$ e $h = \frac{1}{6}$.

Esercizio 4

Si considerino le funzioni $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ e $g(x) = xe^x - 1$ sull'intervallo $[0, 2]$. Si scriva uno script `Matlab` che

- disegna il grafico di $f(x)$ e $g(x)$;
- approssima il punto $\alpha \in [0, 2]$ tale che $f(\alpha) = g(\alpha)$;
- detta $h(x) = g(x) - f(x)$ la funzione differenza tra $g(x)$ e $f(x)$, disegna il grafico di tale funzione;
- calcola $\Pi h(x)$, polinomio interpolatore di $h(x)$, in 7 punti equispaziati;
- calcola l'integrale di $\Pi h(x)/\alpha$ nell'intervallo $[0, 2]$.