Analisi Numerica I - II Appello a.a. 2021–2022

15 febbraio 2022

Esercizio 1

SI consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Caratterizzare la matrice evidenziando le su proprietà
2. Risolvere il sistema con il metodo diretto opportuno.

Soluzione

1. La matrice è tridiagonale, simmetrica, a dominanza diagonale stretta, definita positiva ($A_1 = 4 > 0$, $A_2 = 12 > 0$, $\det(A) = 44 > 0$).
2. I metodi diretti oppportuni sono due: il metodo di Cholesky per matrici tridiagonali e il metodo di Thomas.
   Metodo di Cholesky per matrici tridiagonali $A = L\,L^T$ con L così definita:

$$\begin{aligned} \ell_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} \\ \ell_{i,i-1} &= a_{i,i-1}/\ell_{i-1,i-1} \\ \ell_{i,i} &= \sqrt{a_{i,i} - \ell^2_{i,i-1}} \qquad i = 2,3 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{11}{3}} \end{pmatrix}.$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{11}{3}} \end{pmatrix} \qquad L^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Metodo di Thomas

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix} \qquad U\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-1)^2\right), \quad x \in I = \left[0, \frac{7}{2}\right]$$

Nell'intervallo I la funzione ammette le radici $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 3$

1. Determinare l'ordine di convergenza del metodo di Newton per il calcolo di ciascuna delle due radici.
2. Scrivere il metodo di Newton modificato in modo che il metodo sia di ordine 2 per entrambe le radici.
3. Posto $x^{(0)} = 0$, utilizzando 4 cifre per la mantissa, si eseguano 2 iterazioni del metodo di Newton modificato per il calcolo della radice α_1.

Soluzione

1. Calcolo della molteplicità delle soluzioni.

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-1)^2\right), \qquad f'(x) = \frac{\pi}{2}(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)^2\right)$$

$\alpha_1 = 1 \longrightarrow f'(\alpha_1) = 0 \quad \Longrightarrow$ molteplicità $m_1 \geq 2$

$f''(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)^2\right) + \frac{\pi^2}{4}(x-1)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-1)^2\right) \Longrightarrow f''(\alpha_1) \neq 0 \Longrightarrow$ molteplicità $m_1 = 2$

$\Longrightarrow$ il metodo di Newton per il calcolo di α_1 ha ordine $q = 1$.

$\alpha_2 = 3 \longrightarrow f'(\alpha_2) \neq 0 \quad \Longrightarrow$ molteplicità $m_2 = 1$

$\Longrightarrow$ il metodo di Newton per il calcolo di α_2 ha ordine $q = 2$.

2. $\alpha_1 = 1$ con molteplicità $m_1 = 2$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(x^{(k)}-1)^2\right)}{\frac{\pi}{2}(x^{(k)}-1)\cos\left(\frac{\pi}{4}(x^{(k)}-1)^2\right)}$$

$\alpha_2 = 3$ con molteplicità $m_2 = 1$ Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(x^{(k)}-1)^2\right)}{\frac{\pi}{2}(x^{(k)}-1)\cos\left(\frac{\pi}{4}(x^{(k)}-1)^2\right)}$$

3.

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= 0 \\
x^{(1)} &= 0 - 2\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(0-1)^2\right)}{\frac{\pi}{2}(0-1)\cos\left(\frac{\pi}{4}(0-1)^2\right)} = \frac{4}{\pi} = 1.273 \\
x^{(2)} &= 1.273 - 2\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(1.273-1)^2\right)}{\frac{\pi}{2}(1.273-1)\cos\left(\frac{\pi}{4}(1.273-1)^2\right)} = 0.9997
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Per approssimare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, yt) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente metodo

$$u_{i+1} = u_{i-2} + \frac{h}{2}\left[2f(t_i, u_i) + 5f(t_{i-1}, u_{i-1}) - f(t_{i-2}, u_{i-2})\right]$$

con $u_0 = y_0$, u_1 e u_2 assegnati.

1. Determinare l'ordine del metodo.
2. Dire se il metodo è zero-stabile.
3. Scelti $\lambda = -10$ e $h = 0.2$ dire se il metodo risulta assolutamente stabile.

Soluzione

Metodo multistep lineare con $p = 2$: 3 passi.

$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \qquad b_{-1} = 0, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{5}{2} \quad b_2 = -\frac{1}{2}$

1. Consistenza:

$$\sum_{j=0}^{2} a_j = a_2 = 1 \qquad -\sum_{j=0}^{2} j\, a_j + \sum_{j=0}^{2} b_j = -2 + 1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad \text{OK}$$

$$k = 2: \quad \sum_{j=0}^{2}(-j)^2 a_j - 2\sum_{j=0}^{2} j\, b_j = 4 - 2\left(\frac{5}{2} - 1\right) = 1 \qquad \text{ordine } q \geq 2$$

$$k = 3: \quad \sum_{j=0}^{2}(-j)^3 a_j + 3\sum_{j=0}^{2}(-j)^2 b_j = -8 + 3\left(\frac{5}{2} - 2\right) \neq 1 \qquad \text{ordine } q = 2$$

2. Zero-stabilità $\iff$ Condizione delle radici soddisfatta

$$\rho(r) = r^3 - \sum_{j=0}^{2} a_j\, r^{2-j} = r^3 - 1$$

In $\mathbb{C}$, il polinomio ha come radici le tre radici complesse dell'unità, tra loro distinte e $|r_j| = 1,\ j = 0, 1, 2$ $\implies$ Condizione delle radici soddisfatta. Metodo zero-stabile.

3. $\lambda = -10$ e $h = 0.2$, $h\lambda = -2$.

Polinomio caratteristico:

$$\Pi(r) = r^3 - 1 - \frac{h\lambda}{2}\left(2r^2 + 5r - 1\right) = r^3 + 2r^2 + 5r - 2$$

Non siamo in grado di calcolare in modo elementare le tre radici. Il metodo risulta assolutamente stabile se le radici hanno modulo minore di uno.

Esercizio 4

Si scriva una funzione `Matlab` che implementi il metodo esplicito a più passi

$$u_{i+1} = u_{i-2} + \frac{h}{2} \left[2f(t_i, u_i) + 5f(t_{i-1}, u_{i-1}) - f(t_{i-2}, u_{i-2})\right]$$

Tale funzione deve prevedere in input la funzione f, l'istante iniziale t_0, la condizione iniziale y_0, la durata temporale T e il numero di intervalli N. Si usi il metodo di Eulero in avanti per calcolare i primi passi.