COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

FIRMA ______

Analisi Numerica I - I Appello a.a. 2021–2022

19 gennaio 2022

Esercizio 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Dire se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono.
2. Calcolare la velocità di convergenza asintotica dei due metodi.
3. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, eseguire tre iterazioni del metodo di Jacobi.

Risoluzione

1. La matrice A è a dominanza diagonale stretta per righe e quindi i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono entrambi.
2. La matrice A è tridiagonale per cui vale la relazione $\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$.

$$B_J = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Raggio spettrale di B_J e B_{GS}:

Gli autovalori di B_J sono le radici di $\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\right) = 0 \qquad \rho(B_J) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \rho(B_{GS}) = \frac{1}{12}$

Velocità asintotica di convergenza di Jacobi: $R_J = -\log(\rho(B_J)) = 1.2424533....$

Velocità asintotica di convergenza di Gauss-Seidel: $R_{GS} = 2R_J = 2.48496066.....$

3. Metodo di Jacobi: dato $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_J\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x_2^{(k)} - 1 \\ \frac{1}{3}\left(x_1^{(k)} - x_3^{(k)} + 2\right) \\ -\frac{1}{2}x_2^{(k)} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{18} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Per approssimare

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

si consideri la formula di quadratura aperta con $n = 2$

$$I_2(f) = \alpha f(-\overline{x}) + \beta f(0) + \alpha f(\overline{x})$$

con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $\overline{x} \in [0, 1]$.

1. Si calcolino $\alpha,\ \beta,\ \overline{x}$ in modo da ottenere il massimo grado di esattezza.
2. Si calcoli il grado di esattezza della formula ottenuta.
3. Si utilizzi la formula ottenuta per approssimare l'integrale di $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ utilizzando 4 cifre per la mantissa e si calcoli l'errore commesso.

Risoluzione

1. Calcolo $\alpha,\ \beta,\ \overline{x}$ in modo da ottenere il massimo grado di esattezza. Si impone che la formula integri esattamente i monomi $x^k,\ k \geq 0$ in modo da ottenere tre equazioni

$$\begin{array}{lll} f = 1 & 2\alpha + \quad \beta \ = 2 & \text{prima equazione} \\ f = x & -\alpha\overline{x} \ + \alpha\overline{x} \ = 0 & \text{identità} \\ f = x^2 & \alpha\overline{x}^2 + \alpha\overline{x}^2 = \frac{2}{3} & \text{seconda equazione} \\ f = x^3 & -\alpha\overline{x}^3 + \alpha\overline{x}^3 = 0 & \text{identità} \\ f = x^4 & \alpha\overline{x}^4 + \alpha\overline{x}^4 = \frac{2}{5} & \text{terza equazione} \end{array}$$

Sistema da risolvere:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta \ = 2 \\ \alpha\overline{x}^2 = \frac{1}{3} \\ \alpha\overline{x}^4 = \frac{1}{5} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{x} = \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \alpha = \frac{5}{9} \\ \beta = \frac{8}{9} \end{cases}$$

$$I_2(f) = \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

2. Grado di esattezza $r \geq 4$

$k = 5: \quad I(x^5) = 0 = I_2(x^5) \implies r \geq 5$
$k = 6: \quad I(x^6) = \frac{2}{7} \neq I_2(x^5) \implies r = 5$

3.

$$I\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{4}{\pi} = 1.2732395447....$$

$$\begin{aligned} I_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) &= \frac{1}{9}\left[5\cos\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8\cos(0) + 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] \\ &= 0.1111 \cdot [10\cos(1.217) + 8] = 0.1111 \cdot (3.465 + 8) = 0.1111 \cdot 11.47 = 1.274 \end{aligned}$$

$$E_2(f) = |I(f) - I_2(f)| = .000760455.....$$

Esercizio 3

Per approssimare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, yt) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente metodo

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[-f(t_i, u_i) + 3f\left(t_i + \frac{h}{3}, u_i + \frac{h}{3}f(t_i, u_i)\right)\right] & i = 0, \dots, n-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

1. Determinare l'ordine di consistenza del metodo.
2. Dimostrare che il metodo è zero-stabile, verificando che la funzione incremento $\Phi(t_i, u_i; h)$ è lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente in t_i e h. Calcolare la costante di Lipschitz di $\Phi(t_i, u_i; h)$ supponendo che $f(t, y)$ sia lipschitziana rispetto a y, con costante di Lipschitz L.
3. Dire se il metodo è assolutamente stabile se applicato al problema modello con $\lambda = -5$ e $h = 0.3$.

Risoluzione Il metodo assegnato è un metodo di Runge-Kutta a due stadi con

$$\begin{cases} K_1 = f(t_i, u_i) \\ K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{3}, u_i + \frac{h}{3}K_1\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad c_2 = \frac{1}{3}$$

1. Consistenza: $b_1 + b_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ OK
   Ordine $q = 2$. $b_2 c_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ OK
   Non può essere di ordine superiore. $\Longrightarrow$ Il metodo è consistente di ordine 2.
2. $\Phi(t_i, u_i; h) = -\frac{1}{2}f(t_i, u_i) + \frac{3}{2}f\left(t_i + \frac{h}{3}, u_i + \frac{h}{3}f(t_i, u_i)\right)$

$$\begin{aligned} &|\Phi(t_i, u_i; h) - \Phi(t_i, v_i; h)| \\ &\quad \leq \frac{1}{2}|f(t_i, u_i) - f(t_i, v_i)| + \frac{3}{2}\left|f\left(t_i + \frac{h}{3}, u_i + \frac{h}{3}f(t_i, u_i)\right) - f\left(t_i + \frac{h}{3}, v_i + \frac{h}{3}f(t_i, v_i)\right)\right| \\ &\quad \leq \frac{L}{2}|u_i - v_i| + \frac{3}{2}L\left|u_i + \frac{h}{3}f(t_i, u_i) - v_i + \frac{h}{3}f(t_i, v_i)\right| \\ &\quad \leq \left[\frac{L}{2} + \frac{3}{2}L\left(1 + \frac{h}{3}L\right)\right]|u_i - v_i| = \left(2L + \frac{h}{2}L^2\right)|u_i - v_i| \leq \left(2L + \frac{T}{2}L^2\right)|u_i - v_i| \end{aligned}$$

3. Assoluta stabilità per $\lambda = -5$ e $h = 0.3$
   Essendo il metodo assegnato un metodo di Runge-Kutta a due stadi del secondo ordine, la condizione di assolita stabilità è:

$$\left|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right| < 1$$

   sostituendo i valori asseganti si ha:

$$\left|1 - 0.3 \cdot 5 + \frac{(-0.3 \cdot 5)^2}{2}\right| = |1 - 1.5 + 1.125| = 0.625 < 1 \qquad \text{OK}$$

   Metodo assolutamente stabile.

Esercizio 4

Si consideri la formula di Newton-Cotes chiusa di ordine 4

$$I(f;c,d) = \int_c^d f(x)dx \approx \frac{2}{45}h\left(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4\right), \qquad h = \frac{d-c}{4}.$$

Si scriva una funzione `Matlab` che implementi una versione composita di tale formula. Tale funzione deve avere in input gli estremi dell'intervallo a e b, la funzione $f(x)$, il numero di sottointervalli N in cui applicare la formula e deve produrre come output il valore approssimato dell'integrale $I(f;a,b)$.