COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - I Appello a.a. 2021–2022

19 gennaio 2022

Esercizio 1

SI consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Dire se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono.
2. Calcolare la velocità di convergenza asintotica dei due metodi.
3. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, eseguire tre iterazioni del metodo di Jacobi.

Esercizio 2

Per approssimare

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

si consideri la formula di quadratura aperta con $n = 2$

$$I_2(f) = \alpha f(-\overline{x}) + \beta f(0) + \alpha f(\overline{x})$$

con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $\overline{x} \in [0,1]$.

1. Si calcolino $\alpha,\ \beta,\ \overline{x}$ in modo da ottenere il massimo grado di esattezza.
2. Si calcoli il grado di esattezza della formula ottenuta.
3. Si utilizzi la formula ottenuta per approssimare l'integrale di $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ nell'intervallo $[-1,1]$ utilizzando 4 cifre per la mantissa e si calcoli l'errore commesso.

Esercizio 3

Per approssimare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con f(t,y) lipschitziana in y con costante di Lipschitz L, si consideri il seguente metodo numerico

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[-f(t_i, u_i) + 3f\left(t_i + \frac{h}{3}, u_i + \frac{h}{3}f(t_i, u_i)\right)\right] & i = 0, \ldots, n-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

1. Determinare l'ordine di consistenza del metodo.
2. Dimostrare che il metodo è zero-stabile, verificando che la funzione incremento $\Phi(t_i, u_i; h)$ è lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente in t_i e h e calcolare la costante di Lipschitz di $\Phi(t_i, u_i; h)$.
3. Dire se il metodo è assolutamente stabile se applicato al problema modello con $\lambda = -5$ e $h = 0.3$.

Esercizio 4

Si consideri la formula di Newton-Cotes chiusa di ordine 4

$$I(f;c,d) = \int_c^d f(x)dx \approx \frac{2(d-c)}{180}\left(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4\right).$$

Si scriva un codice `Matlab` che implementi una versione composita di tale fomula. Tale funzione deve avere in input gli estremi dell'intervallo a e b, la funzione f, il numero di sottointervalli N in cui applicare la formula e deve produrre come output il valore approssimato dell'integrale $I(f;a,b)$.