Analisi Numerica I - V Appello a.a. 2020–2021

03 settembre 2021

Esercizio 1

Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

con il metodo iterativo

$$\text{dato } \mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}).$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ e D matrice diagonale con $d_{i,i} = a_{i,i}$, per $i = 1, 2, 3$.

1. Dire per quali valori del parametro α il metodo è consistente.
2. Dire per quali valori del parametro α il metodo è convergente.
3. Calcolare il valore ottimale di α.

Correzione

Il metodo proposto è il metodo di Richardson, con $\alpha = \alpha$ e $P = D$. Osserviamo che A e $D^{-1}A$ sono simmetriche e definite positive (di facile verifica)

1. Metodo consistente se e solo se $\alpha \neq 0$.
2. Essendo gli autovalori di $D^{-1}A$ positivi, il metodo converge sse $0 < \alpha < 2/\rho(D^{-1}A)$.
   Autovalori di $D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$:

   $$(\lambda - 1)^3 - \frac{1}{4}(\lambda - 1) = (\lambda - 1)\left[(\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4}\right] = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} = \rho(D^{-1}A) \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Metodo converge sse $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1} = \frac{4}{3}$
3. Valore ottimale di α

   $$\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_3} = 1.$$

Esercizio 2

Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ con $x \in [0,2]$

1. Si stimi il numero minimo M di suddivisioni dell'intervallo $[0,2]$ affinché il polinomio interpolatore lineare a tratti approssimi la funzione $f(x)$ con un errore $|Ef_{M,1}| \le 10^{-2}$.
2. Si calcoli l'approssimazione di $f(x)$ in $x = \frac{5}{6}$ utilizzando l'opportuno tratto di della funzione interpolante (si costruisca solo quello) utilizzando 5 cifre per in calcolo. Si calcoli l'errore effettivamente commesso in tale punto.

Correzione

1. $$M \ge (b-a) \sqrt[k+1]{\frac{\|f^{(k+1)}(x)\|_\infty}{(k+1)!\,\varepsilon}}$$

   Nell'esercizio $b-a=2$, $k=1$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\|f''(x)\|_\infty = \frac{1}{4}$ $\qquad \Longrightarrow$

   $$M \ge 2\sqrt{\frac{1}{2!\cdot 4\cdot 10^{-2}}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 7.07 \qquad \Longrightarrow M = n = 8, \quad H = h = \frac{1}{4}$$

2. $\overline{x} = \frac{5}{6} \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$

   5 cifre:
   $\overline{x} = 0.83333 \in [0.75, 1]$ $\quad H = 0.25$ $\quad \frac{\pi}{2} = 1.5708$ $\quad \frac{1}{\pi^2} = 0.10132$

   $$\begin{aligned} P_1^{(4)}(x) &= = -4\cdot 0.10132\left[(x-1)\sin(1.5708\cdot 0.75) + (x-0.75)\sin(1.5708\cdot 1)\right] \\ &= 0.40528[-0.92388(x-1) + (x-0.75)] \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} P_1^{(4)}(0.83333) &= 0.40528[-0.92388(0.8333-1) + (0.8333-0.75)] \\ &= 0.40528(0.92388\cdot 0.16667 + 0.08330) = 0.40528\cdot 0.98728 = \end{aligned}$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n) + \frac{h\alpha}{2}[f(t_{n-1}, u_{n-1}) - 3f(t_n, u_n)].$$

Si studino, al variare del parametro α, consistenza, ordine di consistenza e 0-stabilità.

Correzione

1. Consistenza

$$\sum_{j=0}^{1} a_j = \alpha + (1-\alpha) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{vero } \ \forall\alpha$$

$$-\sum_{j=0}^{1} ja_j + \sum_{j=-1}^{1} b_j = -(1-\alpha) + 2 + \frac{\alpha}{2}(1-3) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{vero } \ \forall\alpha$$

Metodo consistente $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Ordine di consistenza

$$\sum_{j=0}^{1}(-j)^2 a_j + 2\sum_{j=-1}^{1}(-j)b_j = (1-\alpha) - 2\,\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\alpha = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{solo per } \alpha = \frac{1}{2}: \qquad \sum_{j=0}^{1}(-j)^3 a_j + 3\sum_{j=-1}^{2}(-j)^2 b_j = -(1-\frac{1}{2}) + 3\,\frac{1}{4} \neq 1$$

Metodo di ordine $q = 2$ per $\alpha = \frac{1}{2}$; di ordine $q = 1$ per gli altri valori reali di α.

3. 0-stabilità $\quad \Longleftrightarrow \quad$ condizione delle radici

$$\rho(r) = r^2 - \alpha r - (1-\alpha) = (r-1)(r-\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r_0 = 1; \ \ r_1 = \alpha$$

Metodo 0-stabile $\quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq \alpha < 1$.