Analisi Numerica I - V Appello a.a. 2020–2021

03 settembre 2021

Esercizio 1

Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

con il metodo iterativo

$$\text{dato } \mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}).$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ e D matrice diagonale con $d_{i,i} = a_{i,i}$, per $i = 1, 2, 3$.

1. Dire per quali valori del parametro α il metodo è consistente.
2. Dire per quali valori del parametro α il metodo è convergente.
3. Calcolare il valore ottimale di α.

Esercizio 2

Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ con $x \in [0, 2]$

1. Si stimi il numero minimo M di suddivisioni dell'intervallo $[0, 2]$ affinché la funzione polinomiale interpolante lineare a tratti approssimi la funzione $f(x)$ con un errore $|Ef_{M,1}| \leq 10^{-2}$.

2. Si calcoli l'approssimazione di $f(x)$ in $x = \frac{5}{6}$ utilizzando l'opportuno tratto della funzione interpolante (si costruisca solo quello) utilizzando 5 cifre per in calcolo. Si calcoli l'errore effettivamente commesso in tale punto.

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$
si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{3} f(t_n, u_n) + \frac{2h}{3} f(t_n + \alpha h, u_n + \alpha h f(t_n, u_n)).$$

Si studino, al variare del parametro α, consistenza, ordine di consistenza e 0-stabilità.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo iterativo per l'approssimazione della soluzione di un sistema lineare della forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ indicato in **Esercizio 1**.
La funzione deve usare il seguente test d'arresto bassato sul residuo

$$\text{se } \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}\| < 10^{-6}\|\mathbf{b}\| \text{ STOP },$$

e non deve fare pi di 500 iterazioni.
La funzione deve ricevere come input la matrice A, il vettore $\mathbf{b}$, il parametro di rilassamento α e il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$. Deve restituire la soluzione approssimata e il numero d'iterazioni fatte.