Analisi Numerica I - IV Appello a.a. 2020–2021

22 luglio 2021

Esercizio 1

Sia data la famiglia di sistemi lineari $A(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ con

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare per quali valori di α è possibile risolvere il sistema con il metodo del gradiente.

2. Posto $\alpha = 1$, si risolva il sistema con il metodo di Cholesky. Per il calcolo si utilizzino 5. Sfruttare il fatto che A è tridiagonale. Si scriva, oltre alla soluzione, la matrice triangolare ottenuta.

Correzione

1. A è simmetrica. Per poter applicare il metodo del gradiente, A deve essere definita positiva. Minori principali: $A_1 = 4 > 0$, $A_2 = 4 > 0$, $A_3 = 4\alpha - 1 > 0 \iff \alpha > \frac{1}{4}$

2. $A = LL^T$. Essendo A tridiagonale, la matrice L risulta bidiagonale e quindi $\ell_{3,1} = 0$.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & .86603 \end{pmatrix}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \ \rightarrow \ y = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.25 \\ 1.8763 \end{pmatrix} \qquad L^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \ \rightarrow \ x = \begin{pmatrix} 0.83333 \\ 2.3333 \\ 2.1667 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Siano date le funzioni $f_1(x) = \sin(x)$ e $f_2(x) = 3x - 2$.

1. Determinare un intervallo I a cui appartiene l'unico punto di intersezione α tra $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

2. Definire un metodo di punto fisso globalmente convergente in I per il calcolo di α e calcolarne l'ordine.

3. Si eseguano 4 iterazioni del metodo definito al punto precedente, scegliendo $x^{(0)} = 1$. Per il calcolo si utilizzino 5 cifre.

4. Si stimi la velocità di convergenza.

Correzione

1. Si consideri $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = \sin(x) - (3x - 2)$.

   Essendo $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, $f(x)$ può essere nulla se $-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \implies \frac{1}{3} \leq x \leq 1$.
   Si osservi che:

   - $f(1/3) = \sin(1/3) + 1 > 0$ e $f(1) = \sin(1) - 1 < 0 \implies \exists \alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ t.c. $f(\alpha) = 0$.
   - $f'(x) = \cos(x) - 3 \leq -2 < 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ strettamente decrescente $\forall x \in \mathbb{R} \implies \alpha$ è unico.

2. Un possibile metodo di punto fisso è il seguente:

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{3}[\sin(x^{(k)}) + 2]$$

   $\Phi(x) = \frac{1}{3}[\sin(x) + 2] \implies \Phi'(x) = \frac{1}{3}\cos(x)$
   $\implies |\Phi'(x)| \leq \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\right) < 1 \; \forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.
   Quindi, fissato $x^{(0)} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, la successione converge all'unico punto di intersezione di $f_1(x)$ e $f_2(x)$.
   Ordine di convergenza: $\Phi'(x) \neq 0 \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \implies q = 1$

   (Altre definizioni del metodo di punto fisso erano possibili come ad esempio il metodo di Newton).

3.

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= 1 \\
x^{(1)} &= \frac{\sin(1) + 2}{3} = 0.94716 \\
x^{(2)} &= \frac{\sin(0.94716) + 2}{3} = 0.93725 \\
x^{(3)} &= \frac{\sin(0.93725) + 2}{3} = 0.93531 \\
x^{(4)} &= \frac{\sin(0.93531) + 2}{3} = 0.93493
\end{aligned}$$

   Stima della velocità di convergenza. Si supponga $x^{(4)} \approx \alpha$

$$R = -\log(|\Phi'(x^{(4)}|) = -\log\left(\left|-\frac{\cos(0.93493)}{3}\right|\right) = -\log(0.3912) \implies R = 1.6197$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{3}\left[2f(t_n, u_n) + f\left(t_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}f(t_n, u_n)\right)\right].$$

1. Si studino consistenza e ordine del metodo.
2. Nel caso particolare in cui nel problema modello si scelga $\lambda = -1$, si trovino le condizioni su h per l'assoluta stabilità.

Correzione

1. Il metodo assegnato è u Metodo di Runge-Kutta a due stadi, con $a_2 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_2 = \frac{1}{3}$. Consistenza: $b_1 + b_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$: OK.

   Ordine. Essendo consistente è almeno di ordine $q = 1$, essendo a due stadi è al più di ordine $q = 2$.
   Calcolo $a_2 b_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \; q = 1$.

2. Il metodo applicato al problema modello $y'(t) = \lambda y(t)$ diventa:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{3}\left[2\lambda u_n + \lambda\left(u_n + \frac{h}{3}\lambda u_n\right)\right] = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{9}(h\lambda)^2\right) u_n$$

   con $\lambda = -1$

$$u_{n+1} = \left(1 - h + \frac{h^2}{9}\right) u_n = \left(1 - h + \frac{h^2}{9}\right)^{n+1} u_0$$

   Metodo assolutamente stabile

$$\Longleftrightarrow \quad -1 < \left(1 - h + \frac{h^2}{9}\right) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{h^2}{9} - h < 0 \\ \frac{1}{9}(h^2 - 9h + 18) > 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} h < 9 \\ h < 3;\; h > 6 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad h < 3$$