Analisi Numerica I - IV Appello a.a. 2020–2021

22 luglio 2021

Esercizio 1 Sia data la famiglia di sistemi lineari $A(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ con

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare per quali valori di α è possibile risolvere il sistema con il metodo del gradiente.
2. Posto $\alpha = 1$, si risolva il sistema con il metodo di Cholesky. Per il calcolo si utilizzino 5. Sfruttare il fatto che A è tridiagonale. Si scriva, oltre alla soluzione, la matrice triangolare ottenuta.

Esercizio 2 Siano date le funzioni $f_1(x) = \sin(x)$ e $f_2(x) = 3x - 2$.

1. Determinare un intervallo I a cui appartiene l'unico punto di intersezione α tra $f_1(x)$ e $f_2(x)$.
2. Definire un metodo di punto fisso globalmente convergente in I per il calcolo di α e calcolarne l'ordine.
3. Si eseguano 4 iterazioni del metodo definito al punto precedente, scegliendo $x^{(0)} = 1$. Per il calcolo si utilizzino 5 cifre.
4. Si stimi la velocità di convergenza.

Esercizio 3 Per l'approssimazione del problema di Cauchy $\quad y' = f(t, y) \quad t > 0, \quad y(0) = y_0$, si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{3}\left[2f(t_n, u_n) + f\left(t_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}f(t_n, u_n)\right)\right].$$

1. Si studino consistenza e ordine del metodo.
2. Nel caso particolare in cui nel problema modello si scelga $\lambda = -1$, si trovino le condizioni su h per l'assoluta stabilità.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo a più passi per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T) \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases}$$

$$u_{n+1} = u_{n-3} + h\frac{4}{3}\big[2f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 2f(t_{n-2}, u_{n-2})\big].$$

e che usi per l'inizializzazione il metodo studiato nell'esercizio 3.