Analisi Numerica I - III Appello a.a. 2020–2021
28 giugno 2021

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Dire se i metodi Jacobi e Gauss-Seidel convergono.
2. Posto $w = \frac{1}{2}$, dire se i metodi JOR e SOR convergono.
3. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ eseguire tre iterazioni del metodo di Jacobi in aritmetica esatta.

Correzione
La matrice A è tridiagonale e simmetrica.
Minori principali: $A_1 = 2 > 0$, $A_2 = 1 > 0$, $A_3 = \frac{1}{2} > 0 \quad \Longrightarrow$ A è definita positiva.

1. $\Longrightarrow$ Gauss-Seidel e Jacobi convergono perché A tridiagonale, simmetrica e definita positiva.
2. $\Longrightarrow$ JOR e SOR convergono per $\omega = \frac{1}{2}$
SOR: A simmetrica e definita positiva; SOR converge $\iff$ $0 < \omega < 2$;
JOR: Jacobi converge $\Longrightarrow$ JOR converge se $0 < \omega < 1$.
3.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_J\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x_2^{(k)} - 1) \\ -x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} \\ \frac{1}{2}(x_2^{(k)} - 1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{x}^{(1)} = D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(0-1) \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(0-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} - 1\right) \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} - 1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Sia dato l'integrale seguente
$$I = \int_0^1 2xe^x dx.$$

1. Approssimare il valore dell'integrale con il metodo dei trapezi composito suddividendo l'intervallo $[-1, 0]$ in $n = 4$ parti uguali, utilizzando 5 cifre per il calcolo.

2. Stimare l'errore commesso.

Correzione

1. $n = 4,\ h = \frac{1}{4} \quad x_i = -1 + \frac{h}{4}$

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{(-1)e^{-1}+0e^0}{2} - \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}\right] \\ &= 0.125(-0.18394 - 0.35428 - 0.30327 - 0.19470) = -0.125 \cdot 1.0362 = -0.25905 \end{aligned}$$

2. Stima dell'errore commesso: $|E_T| \leq \frac{h^2}{12}\|f''(x)\|_\infty$

   $f(x) = xe^x, \quad f'(x) = (1+x)e^x, \quad f''(x) = (2+x)e^x$
   $f''(x)$ è crescente essendo $f'''(x) = (3+x)e^x > 0\ \ \forall x \in [-1, 0] \implies \|f''(x)\|_\infty = f''(0) = 2$

$$|E_T| \leq \frac{1}{12 \cdot 16} \cdot 2 = 0.010417 = 1.0417 \cdot 10^{-2}$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) + h\left[b_0 f(t_n, u_n) + b_1 f(t_{n-1}, u_{n-1})\right].$$

1. Determinare b_0 e b_1 in modo che il metodo risulti consistente di ordine $q = 2$.

2. Si studi la 0-stabilità del metodo ottenuto.

Correzione

1. Consistenza e ordine 2:
   Essendo $a_0 + a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ resta da verificare quando

   $$\begin{cases} -(0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1) + (b_0 + b_1) = -\frac{1}{2} + b_0 + b_1 = 1 \\ (0 \cdot a_0 + 1^2 \cdot a_1) - 2(0 \cdot b_0 + 1 \cdot b_1) = \frac{1}{2} - 2b_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = \frac{7}{4} \\ b_1 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

   Il metodo diventa:

   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) + \frac{h}{4}\left[7f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right].$$

   Essendo un metodo a due passi, può essere al massimo di ordine q=3. Verifico se è di ordine 3:

   $$-a_1 + 3b_1 = -\frac{1}{2} + 3\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4} \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad q = 2.$$

2. 0-stabilità :

   $$\rho(r) = r^2 - a_0 r - a_1 = r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = (r-1)\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r_0 = 1 \\ r_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Condizione delle radici soddisfatta $\Longleftrightarrow$ metodo 0-stabile.