Analisi Numerica I - Appello straordinario a.a. 2020–2021
29 marzo 2021

Esercizio 1 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & \frac{9}{2} & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Utilizzando il pivoting per righe ad ogni passo, si calcoli una fattorizzazione $PA = LU$. Si scrivano le matrici $L,\ U,\ P$.

2. Con la fattorizzazione trovata, si risolva li sistema lineare (1).

Correzione

1. Per il calcolo della fattorizzazione si pu o usare il metodo di Gauss o il metodo di Doolittle. Si ottengono le matrici:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

2.
$$L\mathbf{y} = P\mathbf{b} \to \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \qquad U\mathbf{x} = \mathbf{y} \to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 Si consideri

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

1. Si calcoli qual è il minor numero di parti in cui si deve dividere l'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ per approssimare I con un errore minore di 10^{-3} utilizzando il metodo di Cavalieri-Simpson.

2. Con la suddivisione trovata al punto precedente si approssimi I, utilizzando 5 cifre per il calcolo.

3. Si calcoli l'errore effettivamente commesso.

Soluzione

1.
$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2},\ \ b - a = 1; \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \ f^{IV}(x) = \frac{105}{16x^{9/2}}$$

$$|E_{CS}| \leq \frac{b-a}{180}\left(\frac{H}{2}\right)^4 \|f^{IV}\|_\infty \leq 10^{-3}$$

$$M \geq \frac{1}{2}(b-a)\sqrt[4]{\frac{(b-a)\|f^{IV}\|_\infty}{180 \cdot 10^{-3}}}$$

$b-a=1$, $\|f^{IV}\|_\infty = 148.49\cdots \approx 148.5 \quad \Longrightarrow$

$$M \geq \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{148.5}{180 \cdot 10^{-3}}} \approx 2.68 \quad \Longrightarrow \quad M=3$$

2.
$$M=3 \Longrightarrow n=6 \quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{6} \quad x_i=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}i, \quad i=0,\ldots,6.$$

x_i	.5000	0.6667	0.8333	1.000	1.167	1.333	1.500
y_i	1.414	1.225	1.096	1.000	0.9260	0.8661	.8165

$$\begin{aligned} I_{CS} &= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1})+2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})+f(x_n)\right]= \\ &= \frac{1}{18}\{f(x_0)+4[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)]+2[f(x_2)+f(x_4)]+f(x_6)\}=1.036 \end{aligned}$$

3. $E_{CS}=|I-I_{CS}|=|1.035276180410083-1.036| \approx 7.238210^{-4} < 10^{-3}$

Esercizio 3 Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=f(t,y) & t>0 \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1}=\alpha u_n+(1-\alpha)u_{n-1}+2hf(t_n,u_n)+\frac{h\alpha}{2}[f(t_{n-1},u_{n-1})-3f(t_n,u_n)].$$

Si studino, al variare del parametro α, consistenza, ordine di consistenza e 0-stabilità.

Soluzione
Il metodo proposto è un metodo multistep con

$$p=1, \quad a_0=\alpha, \quad a_1=1-\alpha, \quad b_0=2-\frac{3}{2}\alpha, \quad b_1=\frac{\alpha}{2}.$$

1. Consistenza. Metodo consistente se e solo se $a_0+a_1=1$ e $-a_1+b_0+b_1=1$. Con i dati asseganti entrambe le uguaglianza sono vere $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ e quindi il metodo risulta consistente senza nessuna condizione su α.

2. Ordine. $k=2$: $(-1)^2a_1+2(-1)^1b_1=1-\alpha-2\cdot\frac{\alpha}{2}=1-2\alpha=1 \iff \alpha=0$
$\Longrightarrow$ Metodo alle differenze centrate $\Longrightarrow$ $q=2$ per $\alpha=0$.

3. 0-stabilità. Metodo 0-stabile se e solo se è verificata la condizione delle radici.
   $\rho(r) = r^2 - a_0 r - a_1 = r^2 - \alpha r - (1-\alpha)$, che ammette le due radici

   $$r_0 = 1 \qquad r_1 = \alpha - 1.$$

   Condizione delle radici soddisfatta se $|r_1| \leq 1$ ma $r_1 \neq 1$. Quindi: $-1 \leq \alpha - 1 < 1$ da cui si ricava che il metodo è 0-stabile se e solo se $0 \leq \alpha < 2$.

Esercizio 4