Analisi Numerica I - II Appello a.a. 2020–2021

11 febbraio 2020

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1. Dire se è possibile applicare il metodo il metodo di eliminazione di Gauss senza applicare il pivoting.
2. Calcolare la fattorizzazione di A $A = LDU$ con D matrice diagonale, L e U matrici triangolari inferiore e superiore rispettivamente con elementi diagonali uguali a 1.
3. Utilizzando la fattorizzazione del punto precedente, risolvere il sistema assegnato.

Risoluzione

1. $A_1 = 2 = A_2$, $\det(A) = \frac{3}{2}$ $\quad\Longrightarrow\quad$ Metodo di eliminazione di Gauss non richiede pivoting.
2. $$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. $$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ D\mathbf{z} = \mathbf{y} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{z} \end{cases}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \ \rightarrow \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix} \qquad D\mathbf{z} = \mathbf{y} \ \rightarrow \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad U\mathbf{x} = \mathbf{z} \ \rightarrow \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione $\qquad f(x) = \sin(x) - x^2, \quad x \geq \frac{1}{2}.$

1. Si verifichi che per $x \geq \frac{1}{2}$ la funzione $f(x)$ ammette una sola radice α e si individui un intervallo I chiuso e limitato tale che $\alpha \in I$.
2. Per risolvere l'equazione $f(x) = 0$, si consideri il metodo di punto fisso

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \frac{sin(x^{(k)})}{x^{(k)}} \qquad k \geq 0$$

Dire per quali $x^{(0)} \in I$ il metodo di punto fisso converge e con quale ordine, sapendo che $-\frac{1}{2} < \Phi'(x) < 0$ per $x \in \left[\frac{1}{4}, 2\right]$.

3. Posto $x^{(0)} = \frac{3}{4}$ si eseguano le prime 4 iterazioni del metodo e si stimi la velocità di convergenza. Per il calcolo si utilizzano 5 cifre.

Risoluzione

1. $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, le radici si trovano dove $x^2 < 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] = I$.

   $f'(x) = \cos(x) - 2x < 0$ essendo $0 < \cos(x) < 1$ e $1 \leq 2x \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad \exists! \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. $\Phi(x) = \frac{\sin(x)}{x} \in C^1(I)$

   Essendo $\Phi'(x) < 0 \ \ \forall x \in I$, si ha che $\Phi : I \to [\Phi(1), \Phi(1/2)] \approx [0.84, 0.96] \subset I$.
   Inoltre: $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1 \ \ \forall x \in I$ e $\Phi'(\alpha) \neq 0$.

   Per il teorema di Banach, il metodo converge $\forall x^{(0)} \in I$ con ordine $q = 1$.

3.

k	0	1	2	3	4
$x^{(k)}$	.75	.90885	.86791	.87910	.87608

   Stima velocità di convergenza:

$$R \approx -\log\left(\left|\frac{x^{(4)} - x^{(3)}}{x^{(3)} - x^{(2)}}\right|\right) = -\log\left(\left|\frac{.87608 - .87910}{.87910 - .86791}\right|\right) = -\log(.27703) = 1.28363$$

Esercizio 3
Per approssimare il problema $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \qquad t \in [t_0, t_0 + T]$, si consideri la seguente famiglia di metodi

$$K_0 = f(t_i, u_i), \quad K_1 = f(t_i + \frac{h}{4}, u_i + \frac{h}{4}K_0) \quad u_{i+1} = u_i + h(b_1 K_0 + b_2 K_1), \quad i = 0, ..., n-1$$

con $h = T/n$ e $u_0 = y_0$.

1. Trovare b_1 e b_2 in modo che il metodo ottenuto sia di ordine $q = 2$.
2. Dato il problema $y'(t) + y(t) = 0, \ t > 0, \ y(0) = 1$, dire per quali valori di h il metodo del punto precedente risulta assolutamente stabile.

Risoluzione Famiglia di metodi di Runge-Kutta.

1. Di ordine $q = 2$ se

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ \frac{1}{4} b_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

$$K_0 = f(t_i, u_i), \quad K_1 = f(t_i + \frac{h}{4}, u_i + \frac{h}{4}K_0) \quad u_{i+1} = u_i + h(-K_0 + 2K_1), \quad i = 0, ..., n-1$$

2. Essendo il metodo di ordine 2, la relazione di assoluta stabilità per il problema modello è: $\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right| < 1$.

   Nell'esercizio $\lambda = -1$ per cui si ha

$$\left|1 - h + \frac{1}{2}h^2 < 1\right| \iff -2 < -h + \frac{h^2}{2} < 0 \iff \qquad h < 2$$

Esercizio 4