Analisi Numerica I - II Appello a.a. 2020–2021
11 febbraio 2020

Esercizio 1 Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1. Dire se è possibile applicare il metodo il metodo di eliminazione di Gauss senza utilizzare il pivoting.
2. Calcolare la fattorizzazione $A = LDU$ con D matrice diagonale, L e U matrici triangolari inferiore e superiore rispettivamente con elementi diagonali uguali a 1.
3. Utilizzando la fattorizzazione del punto precedente, risolvere il sistema assegnato.

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f(x) = \sin(x) - x^2, \quad x \geq \frac{1}{2}$.

1. Si verifichi che per $x \geq \frac{1}{2}$ la funzione $f(x)$ ammette una sola radice α e si individui un intervallo I chiuso e limitato tale che $\alpha \in I$.
2. Per risolvere l'equazione $f(x) = 0$, si consideri il metodo di punto fisso

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \frac{sin(x^{(k)})}{x^{(k)}} \qquad k \geq 0$$

   Dire per quali $x^{(0)} \in I$ il metodo di punto fisso converge e con quale ordine, sapendo che $-\frac{1}{2} < \Phi'(x) < 0$ per $x \in \left[\frac{1}{4}, 2\right]$.
3. Posto $x^{(0)} = \frac{3}{4}$ si eseguano le prime 4 iterazioni del metodo e si stimi la velocità di convergenza. Per il calcolo si utilizzano 5 cifre.

Esercizio 3 Per approssimare il problema $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \qquad t \in [t_0, t_0+T]$, si consideri la seguente famiglia di metodi

$$K_0 = f(t_i, u_i), \quad K_1 = f(t_i + \frac{h}{4}, u_i + \frac{h}{4}K_0) \quad u_{i+1} = u_i + h(b_1K_0 + b_2K_1), \quad i = 0, ..., n-1$$

con $h = T/n$ e $u_0 = y_0$.

1. Trovare b_1 e b_2 in modo che il metodo ottenuto sia di ordine $q = 2$.
2. Dato il problema $y'(t) + y(t) = 0,\ t > 0,\ y(0) = 1$, dire per quali valori di h il metodo del punto precedente risulta assolutamente stabile.

Esercizio 4 Scrivere una funzione di Matlab che implementi la forma composita della formula di quadratura di Gauss-Lobatto

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{6}f(-1) + \tfrac{5}{6}f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right) + \tfrac{5}{6}f\left(\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right) + \tfrac{1}{6}f(1)$$

per l'approssimazione di $\int_a^b f(x)\,dx$.
La funzione deve ricevere in ingresso la funzione $f(x)$, gli estremi dell'intervallo d'integrazione, a e b e il numero di sottointervalli da considerare nella forma composita. Deve restituire il valore approssimato dell'integrale.