Analisi Numerica I - I Appello a.a. 2020–2021

13 gennaio 2020

Esercizio 1
Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1. Dire se il metodo JOR per $\omega = \frac{1}{2}$ e il metodo di Gauss-Seidel convergono.
2. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ eseguire due iterazioni del metodo di Jacobi in aritmetica esatta.

Risoluzione

1. Se Jacobi converge $\implies$ Jor converge per $0 < \omega < 1$.

$$B_J = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$ $\implies$ Jacobi converge $\implies$ JOR converge per $\omega = \frac{1}{2}$

2. Gauss-Seidel.

$$B_{GS} = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_{1,2} = 0$; $\lambda_3 = \frac{1}{4}$ IGauss-Seidel converge.

3. Metodo di Jacobi:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_J\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3^{(k)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2}x_3^{(k)} + \frac{7}{4} \\ -x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = D^(-1)\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \\ -\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2
Siano date la funzione $f(x) = \frac{1}{5}\sin(x)$ con $x \in [0, 2]$ e la funzione discreta $(x_i, f(x_i)),\ i = 0, \ldots, n$, con $n = 2M$ e $x_i \in [0, 2]$.

1. Si stimi il numero minimo di suddivisioni dell'intervallo $[0, 2]$ affinché $Pf_{_{M,2}}(x)$ approssimi la funzione $f(x)$ con un errore $|Ef_{M,2}| \leq \varepsilon = 10^{-2}$.

2. Si calcoli l'approssimazione di $f(x)$ in $\overline{x} = \frac{5}{6}$ utilizzando l'opportuno tratto di $Pf_{_{M,2}}(x)$ (si costruisca solo quello) utilizzando 5 cifre per la mantissa. Si calcoli l'errore effettivamente commesso in tale punto.

Risoluzione

1.
$$M \geq (b-a) \sqrt[k+1]{\frac{\|f^{(k+1)}(x)\|_\infty}{(k+1)!\,\varepsilon}}$$
Nell'esercizio $k = 2$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\|f'''(x)\|_\infty = \frac{1}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad M \geq 3$

2. $\overline{x} = \frac{5}{6} \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$
5 cifre:
$\overline{x} = 0.83333 \in [0.66667, 1.3333] \qquad x_0 = 0.66667;\ x_1 = 1;\ x_2 = 1.3333.$
$x_0 - x_1 = 0.33333;\ x_0 - x_2 = -0.66663;\ x_1 - x_2 = 0.3333$
$y_0 = \frac{1}{5}\sin(x_0) = 0.12367;\ y_1 = \frac{1}{5}\sin(x_1) = 0.16829;\ y_2 = \frac{1}{5}\sin(x_2) = 0.19439.$

$$\begin{aligned} Pf_2^{(1)}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(1-x_2)}\,y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,y_2 \\ Pf_2^{(1)}(.83333) &= 0.046377 + 0.12622 - 0.024302 = 0.14830 \end{aligned}$$
$$E(5/6) = \left| f(5/6) - Pf_2^{(1)}(.83333) \right| = |0.1480353706... - 0.14823| = 1.94629... \cdot 10^{-4}$$

Esercizio 3
Per approssimare il problema di Cauchy
$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (t_{_0}, t_{_0} + T], \qquad y(t_{_0}) = y_{_0},$$
si consideri la seguente famiglia di metodi di discretizzazione
$$u_{i+1} = a_0 u_i + a_1 u_{i-1} + h b_{-1} f(t_{i+1}, u_{i+1})$$

1. Calcolare a_0, a_1, b_{-1} in modo da ottenere ordine di consistenza massimo.

2. Si studi l'assoluta stabilità del metodo ottenuto, nel caso particolare in cui $\lambda = -1$ nel problema modello.

Risoluzione

1. Metodo implicito a 2 passi. $p = 1$. relazioni per ordine di consistenza:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 1 \\ -a_1 + b_{-1} = 1 \\ a_1 + 2b_{-1} = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a_0 = \frac{4}{3} \\ a_1 = -\frac{1}{3} \\ b_{-1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

   Metodo:

$$u_{i+1} = \frac{4}{3}u_i - \frac{1}{3}u_{i-1} + \frac{2}{3}hf(t_{i+1}, u_{i+1})$$

2. Assoluta stablità:

$$\Pi(h\lambda) = \frac{1}{3}\left[(3 - 2h\lambda)r^2 - 4r + 1\right] = 0$$

   $\lambda = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \Pi(-h) = \frac{1}{3}\left[(3 + 2h)r^2 - 4r + 1\right] = 0$

$$|r_{1,2}(-h)| = \left|\frac{1}{3 + 2h}\left(2 \pm \sqrt{4 - (3 + 2h)}\right)\right| = \left|\frac{1}{3 + 2h}\left(2 \pm \sqrt{1 - 2h}\right)\right| < 1$$

   Facile verificare che $|r_{1,2}(-h)| < 1 \quad \forall h > 0$.

Esercizio 4

Scrivere uno SCRIPT di Matlab che approssimi la soluzione del problema di Cauchy

$$y'(t) = -(t^2 + 1)\, y(t) \quad t \in (0, 2], \qquad y(0) = 1$$

usando il seguente metodo implicito

$$u_{i+1} = \frac{4}{3}u_i - \frac{1}{3}u_{i-1} + \frac{2}{3}hf(t_{i+1}, u_{i+1})$$

e calcoli l'errore sapendo che la soluzione esatta è la funzione $y(t) = e^{-t(t^2/3+1)}$.