Analisi Numerica I - I Appello a.a. 2020–2021

13 gennaio 2020

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1. Dire se il metodo JOR per $\omega = \frac{1}{2}$ e il metodo di Gauss-Seidel convergono.
2. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ eseguire due iterazioni del metodo di Jacobi in aritmetica esatta.

Esercizio 2

Siano date la funzione $f(x) = \frac{1}{5}\sin(x)$ con $x \in [0,2]$ e la funzione discreta $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, con $n = 2M$ e $x_i \in [0,2]$.

1. Si stimi il numero minimo di suddivisioni dell'intervallo $[0,2]$ affinché il polinomio interpolatore composito con polinomi di grado 2, $Pf_{M,2}(x)$, approssimi la funzione $f(x)$ con un errore $|Ef_{M,2}| \leq 10^{-2}$.
2. Si calcoli l'approssimazione di $f(x)$ in $x = \frac{3}{4}$ utilizzando l'opportuno tratto di $Pf_{M,2}(x)$ (si costruisca solo quello) utilizzando 5 cifre per la mantissa. Si calcoli l'errore effettivamente commesso in tale punto.

Esercizio 3

Per approssimare il problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (t_0, t_0 + T], \qquad y(t_0) = y_0,$$

si consideri la seguente famiglia di metodi di discretizzazione

$$u_{i+1} = a_0 u_i + a_1 u_{i-1} + h b_{-1} f(t_{i+1}, u_{i+1})$$

1. Calcolare a_0, a_1, b_{-1} in modo da ottenere ordine di consistenza massimo.
2. Si studi l'assoluta stabilità del metodo ottenuto, nel caso particolare in cui $\lambda = -1$ nel problema modello.

Esercizio 4

Scrivere uno SCRIPT di Matlab che approssimi la soluzione del problema di Cauchy

$$y'(t) = -(t^2 + 1)\, y(t) \quad t \in (0, 2], \qquad y(0) = 1$$

usando il seguente metodo implicito

$$u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{3}hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

e calcoli l'errore sapendo che la soluzione esatta è la funzione $y(t) = e^{-t(t^2/3+1)}$.