Analisi Numerica I - V Appello a.a. 2019–2020

07 settembre 2020

Esercizio 1

Si consideri la matrice tridiagonale e simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Verificare che è definita positiva.
2. Si scriva il metodo di Cholesky per matrici tridiagonali.
3. Si calcoli l'inversa di A utilizzando il metodo di Cholesky come riscritto al punto precedente.

Risoluzione

1. $A_1 = 1 > 0$, $A_2 = 1 > 0$, $A_3 = 4 > 0$: tutti i minori principali sono positivi, quindi la matrice A è definita positiva.
2. $A = U^T U$ con unici elementi diversi da zero $u_{i,i},\ i = 1, \ldots, n$ e $u_{i-1,1},\ i = 2, \ldots, n$ così definiti: $u_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$

$$u_{i-1,i} = a_{i-1,i}/u_{i-1,i-1}; \qquad u_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - u_{i-1,i}^2} \qquad i = 2, \ldots, n$$

3. $A^{-1} = (U^T U)^{-1} = U^{-1}(U^T)^{-1} = U^{-1}(U^{-1})^T$. Basta quindi calcolare U con il metodo di Cholesky, U^{-1} con le formule per il calcolo dell'inversa di una matrice triangolare superiore e infine calcolare il prodotto di U^{-1} con la sua trasposta.
   Con Cholesky del punto precedente e con le formule per calcolare l'inversa di una matrice triangolare si ha:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

   Infine:

$$A^{-1} = U^{-1}(U^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.25 & -1.25 & 0.25 \\ -1.25 & 1.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx. \tag{1}$$

1. Utilizzando la formula composita di Cavalieri-Simpson si approssimi il valore di $I(f)$ con un errore minore di 10^{-3} considerando il numero minimo di suddivisioni dell'intervallo $[0,1]$. Si calcoli l'errore assoluto effettivamente commesso.

2. Con analoghe considerazioni teoriche si ha che il numero minimo di suddivisioni dell'intervallo $[0,1]$ per ottenere un errore minore di 10^{-3} utilizzando la formula composita dei trapezi è $n = 15$. L'approssimazione ottenuta risulta $I_T = 0.636038$. Dire quale delle due approssimazioni è più precisa e quale è stata ottenuta con il minor costo computazionale.

Risoluzione

1. Calcolo di $M = \frac{b-a}{H} = \frac{1}{H}$:

$$E_{CS} \leq \frac{1}{180}\left(\frac{H}{2}\right)^4 \|f^{(IV)}\|_\infty < 10^{-3} \Longrightarrow M > \sqrt[4]{\frac{10^3}{180 \cdot 2^4} \cdot \frac{\pi^4}{16}} \approx 1.43 \Longrightarrow \quad M = 2$$

Il numero totale di suddivisioni è quindi $\qquad n = 2M = 4$ e $h = .25$.

$$\begin{aligned} I_{CS}(f) &= \frac{1}{12}\left\{\sin(0) + 4\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right] + 2\sin(\pi 4) + \sin(\pi 2)\right\} \\ &= \frac{1}{12}[0 + 4(0.382683 + 0.923880) + 1.41421 + 2] = \frac{7.64045}{12} = 0.636704 \end{aligned}$$

$$I(f) = -\frac{2}{\pi} = 0.63662 \Longrightarrow E_{CS} = |I(f) - I_{CS}| = 0.84 \cdot 10^{-4}]$$

2.
$$E_T = |I(f) - I_T| = 0.63662 - 0.636038 = 0.582 \cdot 10^{-4}$$

Risulta più preciso il Metodo di Cavalieri Simpson.
Costo computazionale: il metodo dei trapezi richiede 16 valutazioni della funzione $f(x)$, mentre quello di Cavalieri Simpson solo 5 che ha quindi un costo computazionale minore.

Esercizio 3
Si consideri il seguente metodo numerico per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, u_n); \qquad K_2 = f(t_n + 2h/3, u_n + 2hK_1/3) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}(K1 + 3K2). \end{cases} \tag{2}$$

1. Calcolare l'ordine di consistenza del metodo.

2. Dire se per $h = 0.1$ e $h = 0.5$ il metodo (2) è assolutamente stabile se applicato al problema modello
$$y' = -10y \quad t > 0 \qquad y(0) = 1. \tag{3}$$

Risoluzione

1. Il metodo assegnato è un metodo di Runge-Kutta a due stadi con: $b1 = \frac{1}{4}$; $b_2 = \frac{3}{4}$; $a_2 = \frac{2}{3}$. Si ha quidni che: $b_1 + b_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ e $a_2 b_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ Il metodo è quindi consistente di ordine $p = 2$.

2. Per un qualsiasi metodo di Runge-Kutta a due stadi di ordine 2 la condizione di assoluta stabilità è: $\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right| < 1$.
   Per il problema dato, $\lambda = -10$ e quindi la condizione diventa: $\left|1 - 10h + 50h^2\right| < 1$.
   Per $h = 0.1$ si ha; $|1 - 1 + 50 \cdot .01| = 0.5 < 1$: assoluta stabilità.
   Per $h = 0.5$ si ha; $|1 - 10 \cdot 0.5 + 50 \cdot .25| = 8.5 > 1$: assoluta instabilità.

Esercizio 4