Analisi Numerica I - V Appello a.a. 2019–2020

07 settembre 2020

Esercizio 1

Si consideri la matrice tridiagonale e simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Verificare che è definita positiva.
2. Si scriva il metodo di Cholesky per matrici tridiagonali.
3. Si calcoli l'inversa di A utilizzando il metodo di Cholesky come riscritto al punto precedente.

Esercizio 2

Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx. \tag{1}$$

1. Utilizzando la formula composita di Cavalieri-Simpson si approssimi il valore di $I(f)$ con un errore minore di 10^{-3} considerando il numero minimo di suddivisioni dell'intervallo $[0,1]$. Si calcoli l'errore assoluto effettivamente commesso.
2. Con analoghe considerazioni teoriche si ha che il numero minimo di suddivisioni dell'intervallo $[0,1]$ per ottenere un errore minore di 10^{-3} utilizzando la formula composita dei trapezi è $n = 15$. L'approssimazione ottenuta risulta $I_T = 0.63604$. Dire quale delle due approssimazioni è più precisa e quale è stata ottenuta con il minor costo computazionale.

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo numerico per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, u_n); \qquad K_2 = f(t_n + 2h/3, u_n + 2hK_1/3) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}(K1 + 3K2). \end{cases} \tag{2}$$

1. Calcolare l'ordine di consistenza del metodo.
2. Dire se per $h = 0.1$ e $h = 0.5$ il metodo (2) è assolutamente stabile se applicato al problema modello
$$y' = -10y \quad t > 0 \qquad y(0) = 1. \tag{3}$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo (2) dell'esercizio 3 per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy della forma

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T)$$
$$y(t_0) = y_0\,.$$