

Analisi Numerica I - IV Appello a.a. 2019–2020  
22 luglio 2020

**Esercizio 1**

Sia dato il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Si calcoli la soluzione del sistema (1) con il metodo ritenuto più opportuno, motivando la scelta fatta e riportando i risultati parziali significativi ottenuti.

**Esercizio 2**

Per determinare la radice  $\alpha \in (0, 1]$  dell'equazione  $x + \log(x) = 0$  si considerino i seguenti metodi di punto fisso:

$$x_{n+1} = -\log(x_n) \quad x_{n+1} = e^{-x_n} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n}) \quad (2)$$

1. Dire se i tre metodi convergono e con quale ordine.
2. Sapendo che  $\alpha \approx 0.5$ , dire quale dei tre è da preferire.

**Esercizio 3**

Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T], \quad y(t_0) = y_0$$

si consideri il metodo alle differenze centrate

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n), \quad u_0 = y_0, u_1 = ? \quad (3)$$

1. Non utilizzando la teoria dei metodi multistep, si verifichi che il metodo (3) è consistente di ordine  $q = 2$ . Si indichi un metodo opportuno per calcolare  $u_1$ .
2. Utilizzando il metodo (3), si approssimi la soluzione del problema  $y'(t) = -y^2$ ,  $y(0) = 1$  in  $t = 0.75$ , considerando  $h = .25$  e calcolando  $u_1$  con il metodo indicato al punto 1. Per i calcoli si usino 5 cifre per la mantissa.

**Esercizio 4**

Si consideri la matrice  $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Scrivere uno **script** di Matlab che

- calcoli il raggio spettrale della matrice d'iterazione del metodo di Jacobi  $B_J$ , del metodo di Gauss-Seidel  $B_{GS}$  e del metodo di Richardson  $B_R = I - 0.5P^{-1}M$  con  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;
- calcoli la fattorizzazione LU di  $P$ .