Analisi Numerica I - III Appello a.a. 2019–2020

19 giugno 2020

Esercizio 1

Per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

si consideri il metodo iterativo seguente:

$$\begin{aligned} &\text{assegnato} \;\; \mathbf{x}^{(0)} \\ &P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \qquad k \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. Scrivere la matrice N per cui il metodo iterativo (2) risulta consistente
2. dire se il metodo iterativo ottenuto (2) converge.

Risoluzione

1. $N = P - A$:

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Calcolo $\rho(B) = \rho(P^{-1}N)$.

$$P^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori di $P^{-1}N$:

$$\det(\lambda I - P^{-1}N) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda + 1)(\lambda + i)(\lambda - i) \quad \Rightarrow \quad \rho(P^{-1}N) = 1$$

$\Rightarrow$ Il metodo (2) non converge.

Esercizio 2

Si consideri

$$f(x) = \cos(\pi x) \qquad x \in [0,1] \tag{4}$$

1. Si calcoli la parabolica a tratti, con due tratti, che interpola la funzione (4) utilizzando nodi equidistanti in $[0,1]$, considerando gli estremi dell'intervallo come primo e ultimo nodo di interpolazione.

2. Con la funzione trovata al punto precedente, si calcoli un'approssimazione di $f(x)$ in $x = 1/8$ e $x = 7/8$ e l'errore commesso nei due casi.

Risoluzione

1. Per costruire la parabolica a tratti richiesta servono in totale 5 punti: e l'associata funzione discreta

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y_i	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1

Primo tratto di parabolica:

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

$$P_2^{(0)}(x) = \frac{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{4})(0-\frac{1}{2})} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{4}-0)(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(x-0)(x-\frac{1}{4})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})} \cdot 0$$

$$P_2^{(0)}(x) = (4x-1)(2x-1) - \frac{8x(2x-1)}{\sqrt{2}} = (2x-1)(4x-1-4\sqrt{2}x) \qquad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Secondo tratto di parabolica:

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1

$$P_2^{(1)}(x) = \frac{(x-\frac{3}{4})(x-1)}{(\frac{1}{2}-\frac{3}{4})(\frac{1}{2}-1)} \cdot 0 + \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})(\frac{3}{4}-1)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{4})} \cdot (-1)$$

$$P_2^{(1)}(x) = 4\sqrt{2}(2x-1)(x-1)-(2x-1)(4x-3) \ = (2x-1)[4\sqrt{2}(x-1)-4x+3] \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Valutazioni in $x = \frac{1}{8}$ e $\frac{7}{8}$.

$$\frac{1}{8} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \ \Rightarrow \ P_2^{(0)}(\frac{1}{8}) = (2\frac{1}{8} - 1)(4\frac{1}{8} - 1 - 4\sqrt{2}\frac{1}{8}) = \frac{3(1+\sqrt{2})}{8} = 0.90533008588991...$$

Errore commesso : $\left|P_2^{(0)}(\frac{1}{8}) - \cos(\frac{\pi}{8})\right| = 0.01854944662109...$

$$\frac{7}{8} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \ \Rightarrow \ P_2^{(1)}(\frac{7}{8}) = (2\frac{7}{8}-1)[4\sqrt{2}(\frac{7}{8}-1)-4\frac{7}{8}+3] = -\frac{3(1+\sqrt{2})}{8} = -0.90533008588991....$$

Errore commesso : $\left|P_2^{(1)}(\frac{7}{8}) - \cos(\frac{7}{8}\pi)\right| = 0.01854944662109...$

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo numerico per l'approssimazione del generico problema di Cauchy del primo ordine:

$$u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{3}hf(t_n, u_n). \tag{5}$$

1. Si studino consistenza e zero-stabilità del metodo.
2. Utilizzando 4 cifre, si calcoli un'approssimazione della soluzione $y(t)$ del problema

$$y' = -10y \quad t > 0 \qquad y(0) = 1. \tag{6}$$

   con il metodo (5) in $t = 2.5$, scegliendo $h = 0.5$ e $u_1 = .6738 \cdot 10^{-2}$.
   Si motivino (con verifica) i risultati ottenuti.

Risoluzione

1. Consistenza:

$$a_0 + a_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \qquad -a_1 + b_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

   $\Rightarrow$ il metodo è consistente.

2. Zero-stabilità:

$$\rho(r) = \frac{1}{3}(3r^2 - 4r + 1) = \frac{1}{3}(r-1)(3r-1) \quad \Rightarrow \quad r_0 = 1,\ r_1 = \frac{1}{3}$$

   $\Rightarrow$ Condizione delle radici soddisfatta $\Rightarrow$ Metodo zero-stabile.

3. Il problema dato è il problema modello con $\lambda = -10$. Calcolare un'approssimazione di $y(2.5)$ con $h = 0.1$ significa calcolare u_5. Metodo (5) applicato al problema (6):

$$u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n-1} - \frac{2}{0}3hu_n \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3}[(4-20h)u_n - u_{n-1})]$$

   e per $h = 0.5$, si ha:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}[(-6u_n - u_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1; \quad u_1 = 0.6738 \cdot 10^{-2} = 0.006738 \\
u_2 &= \frac{1}{3}(-6 \cdot 0.006738 - 1) = -2.002 \\
u_3 &= \frac{1}{3}(-6 \cdot (-2.002) - 0.006738) = -0.3468 \\
u_4 &= \frac{1}{3}(-6 \cdot 0.6539 - (-2.002)) = 0.6914 \\
u_5 &= \frac{1}{3}(-6 \cdot (3.786 - 0.6539) = -1.267 \\
u_6 &= \frac{1}{3}(-6 \cdot (3.786 - 0.6539) = 2.305
\end{aligned}$$

   La funzione discreta oscilla tra valori negativi e postivi. Sia i valori positivi che quelli negativi aumentano i modulo. Indice del comportamento di un metodo non assolutamente stabile.

4. verifica: basta dimostrare che il metodo (5) applicato al problema modello (6) con $h = 0.5$ non è assolutamente stabile, cioè che il polinomio caratteristico ha almeno una radice in modulo maggiore di 1. Polinomio caratteristico:

$$\Pi(r) = \rho(r) - h\lambda\sigma(r) = \rho(r) + 0.5 \cdot 10\sigma(r) = \frac{1}{3}(3r^2 - 4r + 1) + .5 \cdot 10\frac{2}{3}r = \frac{1}{3}(3r^2 + 6r + 1)$$

$$\Longrightarrow r_{0,1} = \frac{1}{3}(-3 \pm \sqrt{6}) = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \Longrightarrow \quad |r_1| = \left| -1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right| > 1$$

Metodo assolutamente instabile per $\lambda = -10$ e $h = 0.5$.

Esercizio 4

Si considerino la funzione $f(x) = (x-2)^3 + 4 - e^{x-2}$ e il polinomio $P(x)$ e la funzione spline cubica $S(x)$ che interpolano $f(x)$ nei punti di ascissa $x_i = i$ per $i = 0, 1, \dots, 7$. Scrivere uno script di Matlab che

1. disegni i grafici di $f(x)$, di $P(x)$ e di $S(x)$ nell'intervallo $[0, 7]$;
2. calcoli le radici del polinomio $P(x)$;
3. calcoli l'area della regione $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x) > 0\}$.