Analisi Numerica I - II Appello a.a. 2019–2020

7 febbraio 2020

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}.$$

1. Verificare che il sistema dato ammette come soluzione il vettore $\mathbf{x} = (1 \; -1)^T$.
2. Risolvere il sistema dato con il metodo di eliminazione di Gauss utilizzando 5 cifre per la mantissa (calcolare $m_{2,1}$ con 5 cifre per la mantissa).
3. Giustificare il risultato ottenuto.

Risoluzione

1. Calcolo

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.780 - 0.563 \\ 0.913 - 0.659 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

2. Applico eliminazione di Gauss, arrotondando a 5 cifre la mantissa:

$$\begin{aligned} m_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = \frac{0.913}{.780} = 1.1705 \\ a_{2,2}^{(2)} &= a_{2,2} - m_{2,1}a_{1,2} = 0.659 - 1.1705 \cdot 0.563 = 0.85 \cdot 10^{-5} \\ b_2^{(2)} &= b_2 - m_{2,1}b_1 = 0.254 - 1.1705 \cdot 0.217 = 0.15 \cdot 10^{-5} \\ \bar{x}_2 &= \frac{b^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} = 0.17647 \\ \bar{x}_1 &= \frac{1}{a_{1,1}}(b_1 - a_{1,2}x_2) = \frac{0.217 - 0.563 \cdot 0.17647}{0.780} = 0.15083 \end{aligned}$$

3. Calcolo numero di condizionamento di A: $K_\infty(A)$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 659'000 & -563'000 \\ -913'000 & 780'000 \end{pmatrix}$$

$$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 1.572 \cdot 1'693'000 = 2'661'396 = 2.661396 \cdot 10^6$$

$\Rightarrow$ la soluzione approssimata è molto diversa dalla soluzione esatta perché la matrice A è malcondizionata.

Esercizio 2

Si vogliono calcolare gli zeri della funzione

$$f(x) = x - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{8}{9} \tag{1}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$

1. Con quattro passi del metodo di bisezione si determini l'intervallo $[a, b]$ in cui si trova almeno uno zero α di (1).

2. Dire quante radici della funzione (1) si trovano in $[a, b]$.

3. Determinare per quali valori $x^{(0)} \in [a, b]$ il metodo di punto fisso

$$x^{(k+1)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^{(k)}\right) - \frac{8}{9} \tag{2}$$

converge e con quale ordine.

Risoluzione

1. Metodo di bisezione:
   $[a^{(0)}, b^{(0)}] = [-2, 2] \quad x^{(0)} = 0$
   $f(-2) = -0.\bar{1} < 0, \quad f(2) = 3.\bar{8} > 0, \quad f(0) = -0.\bar{1} < 0 \quad \Longrightarrow$
   $[a^{(1)}, b^{(1)}] = [0, 2] \quad x^{(1)} = 1$
   $f(0) = -0.\bar{1} < 0, \quad f(2) = 3.\bar{8} > 0, \quad f(1) = 1.\bar{8} > 0 \quad \Longrightarrow$
   $[a^{(2)}, b^{(2)}] = [0, 1] \quad x^{(2)} = \frac{1}{2}$
   $f(0) = -0.\bar{1} < 0, \quad f(1) = 1.\bar{8} > 0, \quad f(0.5) = 0.6817... > 0 \quad \Longrightarrow$
   $[a^{(3)}, b^{(3)}] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad x^{(3)} = \frac{1}{4}$
   $f(0) = -0.\bar{1} < 0, \quad f(0.5) = 0.6817... > 0, \quad f(0.25) = 0.215... > 0 \quad \Longrightarrow$

$$[a^{(4)}, b^{(4)}] = [a, b] = \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

2. Essendo $f(x)$ continua, $f(0) < 0$, $f(0.25) > 0$ e $f'(x) = 1 + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) > 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$,

$$\Longrightarrow \quad \exists\,!\alpha \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ tale che } f(\alpha) = 0$$

.

3. $\Phi(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{8}{9}$, $\Phi'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 0$ e decrescente $\quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$
   $\max|\Phi'(x) = |\Phi'(0.25)| = 0.6011.... < 1$
   $\Longrightarrow$ il metodo di punto fisso (2) converge $\forall x^{(0)} \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$
   $\Longrightarrow$ il metodo ha ordine $p = 1$ essendo $\Phi'(x) = 0$ per $x = 0$ che non e punto fisso di (2).

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0; \qquad t \in (t_0, t_0 + T],$$

si consideri il seguente schema numerico:

$$u_{n+1} = \frac{18}{11}u_n - \frac{9}{11}u_{n-1} + \frac{2}{11}u_{n-2} + \frac{6}{11}hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \quad n = 2, \dots, N_h - 1 \qquad (3)$$

1. Si studino consistenza, ordine e zero-stabilità del metodo (3).
2. Si indichi un metodo opportuno (il nome) per il calcolo dei dati iniziali u_1 e u_2 e si motivi la risposta.

Risoluzione

Il metodo (3) è un metodo implicito a tre passi ($p = 2$) con:
$a_0 = \frac{18}{11}$, $a_1 = -\frac{9}{11}$, $a_2 = \frac{2}{11}$, $b_{-1} = \frac{6}{11}$, $b_0 = b_1 = b_2 = 0$.

1. Consistenza:

   $a_0 + a_1 + a_2 = 1, \quad -a_1 - 2a_2 + b_{-1} = 1 : \qquad$ OK

2. Ordine:

   $i = 2 : \quad a_1 + 4a_1 + 2b_{-1} = 1$
   $i = 3 : \quad -a_1 - 3a_1 + 3b_{-1} = 1$
   $i = 4 : \quad -a_1 + 4a_1 + 4b_{-1} \neq 1$

   $\Longrightarrow \qquad$ ordine $q = 3$

3. Zero-stabilità:

   $\rho(r) = r^3 - \frac{18}{11}r^2 + \frac{9}{11}r - \frac{2}{11}$

   Essendo il metodo consistente, $r_0 = 1$ è radice. Applicando Ruffini si ha:

   $\rho(r) = \frac{1}{11}(r-1)(11r^2 - 7r + 2)$ da cui $r_{1,2} = \frac{1}{22}(7 \pm \sqrt{-39})$

   $|r_{1,2}| = \frac{1}{22}\sqrt{88} < 1$: $\Longrightarrow \quad$ Metodo zero-stabile.

4. Essendo il metodo dato di ordine $q = 3$, un metodo opportuno per il calcolo di u_1 e u_2 sarà un metodo ad un passo di ordine 3, e quindi un metodo di Runge-Kutta a tre stadi di ordine 3.

Esercizio 4

Scrivere uno SCRIPT di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t\, y(t) & t \in (0, 2] \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

usando il metodo descritto nell'Esercizio 3 con passo $h = 0.1$.