Analisi Numerica I - I Appello a.a. 2019–2020

9 gennaio 2020

Esercizio 1

Siano dati la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Siano P la parte tridiagonale di A e $N = P - A$.
Per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si consideri il seguente metodo iterativo

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ &\text{per } k \geq 0 \\ &\quad \mathbf{x}^{(k+1)} = P^{-1}N\mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{1}$$

1. Si studino consistenza e convergenza del metodo.
2. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, si calcolino le prime tre iterazioni del metodo.

Risoluzione

Le matrici P e N sono rispettivamente

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Le matrici A, P e, ovviamente, $2P - A$ sono simmetriche.
   Calcolando i minori principali di A, P, e $2P - A$ si osserva che sono tutti positivi.
   $\Rightarrow$ la matrici A, P, e $2P - A$ sono simmetriche e definite positive
   $\Rightarrow$ il metodo (1) converge.

2. Ad ogni iterazione si deve risolvere un sistema lineare del tipo $P\mathbf{y} = \mathbf{c}$. Applico il metodo di Thomas e trovo:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Risolvendo i due sistemi triangolari si ha:

$$L\mathbf{z} = \mathbf{c} \;\rightarrow\; \mathbf{z} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 - \frac{1}{3}c_1 \\ c_3 \end{pmatrix}; \qquad U\mathbf{y} = \mathbf{z} \;\rightarrow\; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(z_1 - y_2) \\ \frac{3}{5}z_2 \\ \frac{1}{2}z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}c_1 - \frac{1}{5}c_2 \\ -\frac{1}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2 \\ \frac{1}{2}c_3 \end{pmatrix}$$

da cui, essendo $\mathbf{c} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$, si ha:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{4}{5} \\ \frac{1}{10}x_3^{(k)} - \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Le tre iterazioni richieste saranno pertanto:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{20} \\ -\frac{1}{40} \\ \frac{19}{20} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{99}{100} \\ -\frac{1}{200} \\ \frac{79}{80} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_1^2 \log(x)dx. \qquad (2)$$

Si calcolino

1. il numero minimo di intervalli necessario per calcolare $I(f)$ con un errore minore di $5 \cdot 10^{-3}$ utilizzando la formula composita di Cavalieri-Simpson.
2. il valore approssimato dell'integrale utilizzando 5 cifre per la mantissa.
3. l'errore assoluto effettivamente commesso.

Risoluzione

1. Due possibilità: risolvere in M o in $n = 2M$. Nel secondo caso si ha:

$$E_{CS} \leq \frac{b-a}{180}\|f^{IV}(x)\|_\infty h^4 = \frac{(b-a)^5}{180} f^{IV}(x)\frac{1}{n^4} \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180}\|f^{IV}(x)\|10^3}$$

$f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4}$ e quindi in $[1,2]$ si ha $\|f^{IV}(x)\|_\infty = |f^{IV}(1)| = 6$

$$\Rightarrow \quad n \geq \sqrt[4]{\frac{6000}{180}} \approx 2.40 \qquad n = 4$$

In totale si avranno 5 punti che distano $h = \frac{1}{4}$:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{5}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{7}{4}, \quad x_4 = 2$$

2. Integrale approssimato:

$$\begin{aligned} I_{CS} &= \frac{1}{12}\left[\log(1) + \log(2) + 4(\log(1.25) + \log(1.75)) + 2\log(1.5)\right] \\ &= 0.083333[0 + 0.69315 + 4(0.22314 + 0.55962) + 2 \cdot 0.40547] \\ &= 0.083333(0.69315 + 3.1310 + 0.81094) = 0.083333 \cdot 4.6351 = 0.38626 \end{aligned}$$

3. Errore.

$$I(f) = \int_1^2 \log(x)dx = x(log(x)-1)|_1^2 = 2(\log(2)-1)-(\log(1)-1 = 2\log(2)-1 = 0.3863$$

$$E_{CS} = |I_{CS} - I(f) = |0.38626 - 0.3863| = 0.00004$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0; \qquad t \in (t_0, t_0 + T],$$

si consideri il seguente schema numerico: dato $u_0 = y_0$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{5}\left[f(t_n, u_n) + 4f\left(t_n + \frac{3}{8}h, u_n + \frac{3}{8}hf(t_n, u_n)\right)\right], \quad k = 0, \ldots, N_h - 1 \quad (3)$$

1. Si studino consistenza e ordine del metodo (3).
2. Trovare la condizione sul passo h affinché il metodo (3) risulti assolutamente stabile nel caso particolare in cui nel problema modello il parametro $\lambda \in \mathbb{R}^-$.

Risoluzione Il metodo proposto è un metodo di Runge-Kutta a due stadi con

$$b_1 = \frac{1}{5}, \quad b_2 = \frac{4}{5}, \quad c_2 = \frac{3}{8}$$

1. Consistenza: soddisfatta essendo $b_1 + b_2 = 1$
   Ordine $p = 1$ essendo $b_2 c_2 = \frac{3}{10} \neq \frac{1}{2}$
2. Assoluta stabilità con $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Approssimando il problema modello con il metodo (3) si ha:

   $$u_{n+1} = \left[1 + h\lambda + \frac{3}{10}(h\lambda)^2\right] u_n$$

   Per avere assoulta stabilità deve essere:

   $$-1 < 1 + h\lambda + \frac{3}{10}(h\lambda)^2 < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad h < \frac{10}{3|\lambda|}$$

Esercizio 4

Scrivere un funzione di Matlab che implementi l'algoritmo di Thomas per il calcolo della fattorizzazione LU di una matrice tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \beta_1 & 1 & & & & \\ & \beta_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_{n-2} & 1 & \\ & & & & \beta_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & & \\ & \alpha_2 & c_2 & & & \\ & & \alpha_3 & c_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} = LU\,.$$

La funzione deve ricevere in input tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ e restituire due vettori $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$.