COGNOME ____ NOME ____ N. Matricola ____

FIRMA ____

Analisi Numerica I - I Appello a.a. 2019–2020

9 gennaio 2020

Esercizio 1

Siano dati la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Siano P la parte tridiagonale di A e $N = P - A$.
Per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si consideri il seguente metodo iterativo

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ &\text{per } k \geq 0 \\ &\qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = P^{-1}N\mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

1. Si studino consistenza e convergenza del metodo.
2. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, si calcolino le prime tre iterazioni del metodo.

Esercizio 2

Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_1^2 \log(x)dx. \tag{1}$$

Si calcolino

1. il numero minimo di intervalli necessario per calcolare $I(f)$ con un errore minore di $5 \cdot 10^{-3}$ utilizzando la formula composita di Cavalieri-Simpson.
2. il valore approssimato dell'integrale utilizzando 5 cifre per la mantissa.
3. l'errore assoluto effettivamente commesso.

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0; \qquad t \in (t_0, t_0 + T],$$

si consideri il seguente schema numerico: dato $u_0 = y_0$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{5}\left[f(t_n, u_n) + 4f\left(t_n + \frac{3}{8}h, u_n + \frac{3}{8}hf(t_n, u_n)\right)\right], \quad k = 0, \ldots, N_h - 1 \quad (2)$$

1. Si studino consistenza e ordine del metodo (2).
2. Trovare la condizione sul passo h affinché il metodo (2) risulti assolutamente stabile nel caso particolare in cui nel problema modello il parametro $\lambda \in \mathbb{R}^-$.

Esercizio 4

Scrivere un funzione di Matlab che implementi l'algoritmo di Thomas per il calcolo della fattorizzazione LU di una matrice tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \beta_1 & 1 & & & & \\ & \beta_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_{n-2} & 1 & \\ & & & & \beta_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & & \\ & \alpha_2 & c_2 & & & \\ & & \alpha_3 & c_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} = LU\,.$$

La funzione deve ricevere in input tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ e restituire due vettori $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$.