Analisi Numerica I - 5 Appello a.a. 2018–2019 - CORREZIONE

11 settembre 2019

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Posto $P = diag(4\ 2\ 4)$, $N = P - A$, $B = P^{-1}N$ e $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{b}$, si consideri il metodo iterativo

$$\text{dato } \mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k \geq 0. \tag{2}$$

1. Verificare se il metodo iterativo (2) converge.
2. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ si calcolino tre iterazioni del metodo (2) per risolvere il sistema lineare (1), eseguendo i calcoli in aritmetica esatta.

Soluzione

1. La matrice A è simmetrica e definita positiva ($A_1 = 5,\ A_2 = 9,\ A_3 = 18$), la matrice P è simmetrica e definita positiva, la matrice $2P - A$ è simmetrica e definita positiva ($(2P - A)_1 = 3$, $(2P - A)_2 = 5$, $(2P - A)_3 = 2$). Di conseguenza il metodo (2) converge.

   In alternativa: dimostrare che $\rho(B) < 1$.

2. Matrice B e vettore $\mathbf{c}$:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

   $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$, si ha:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)} - 1) \\ -\frac{1}{2}(x_1^{(k)} - 1)) \\ -\frac{1}{4}(3x_1^{(k)} - 1) \end{pmatrix}$$

   da cui:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{9}{64} \\ \frac{9}{16} \\ \frac{11}{32} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Si vuole approssimare

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \tag{3}$$

con la seguente formula di quadratura:

$$I_3(f) = \alpha f(-1) + \beta f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \beta f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \alpha f(1) \tag{4}$$

Si determino α e β in modo da avere il massimo grado di esattezza possibile. La formula risultante è aperta o chiusa?
Con α e β trovati,

1. si determini il grado di esattezza del metodo (4).
2. si consideri $f(x) = e^x$ e si calcolino l'approssimazione dell'integrale (3) e l'errore commesso. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre decimali per la mantissa.

Soluzione

1. Per calcolare α e β,è sufficiente imporre che vengano integrati esattamente i monomi x^p con $p \geq 0$ fino ad ottenere un sistema con soluzione unica. Si ha:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} x^0 dx = 2 = 2(\alpha + \beta) & \text{condizione di consistenza} \\ \int_{-1}^{1} x^1 dx = 0 = -\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\beta + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta + \alpha = 0 & \text{identità} \\ \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = 2\left(\alpha + \frac{1}{3}\beta\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

   La formula risulta:

$$I_3(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{5}$$

   La formula è quindi APERTA ed ha grado di esattezza $r \geq 2$.

2. Per calcolare il grado di esattezza, si devono integrare i monomi x^p con $p > 2$ fino a quando integrale esatto ed approssimato danno risultati diversi.

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad r \geq 3$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

3. Calcolo integrale approssimato ed errore:

$$I = \int_{-1}^{1} e^x dx = e - e^-1 = 2.3504 \qquad \text{(5 cifre per mantissa)}$$

$$I_3(e^x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2.3427$$

$$E_3(e^x) = |I - I_3(e^x)| = 0.0077 = .77 \cdot 10^{-2}$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

si consideri la famiglia di metodi lineari espliciti a due passi:

$$u_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha u_{n-1} + \frac{h}{2}[(3+\alpha)f(t_n, u_n) + (\alpha - 1)f(t_{n-1}, u_{n-1})] \tag{7}$$

1. Trovare le condizioni su α affinché il metodo (7) risulti consistente e zero-stabile.
2. Tra i metodi zero-stabili della famiglia (7) trovare il massimo ordine del metodo.

Soluzione

1. Consistenza:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{p} 1 - \alpha + \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \sum_{j=0}^{p}(-j)a_j + \sum_{j=0}^{p} b_j = -\alpha + \frac{1}{2}(3 + \alpha + \alpha - 1) = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il metodo è consistente $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Zero-stablità

$$\rho(r) = r^2 - (1-\alpha)r - \alpha = (r-1)(r+\alpha).$$

Metodo zero-stabile sse

$$|\alpha| \leq 1 \quad \text{e} \quad \alpha \neq -1.$$

2. Ordine $q \geq 2$:

$$\sum_{j=0}^{p}(-j)^2 a_j + 2\sum_{j=0}^{p}(-j)b_j = \alpha - 2\frac{1}{2}(\alpha - 1) = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ordine $q \geq 3$:

$$\sum_{j=0}^{p}(-j)^3 a_j + 3\sum_{j=0}^{p}(-j)^2 b_j = -\alpha + 3\frac{1}{2}(\alpha - 1) = \frac{1}{2}(\alpha - 3) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

Essendo $\alpha = 3 > 1$ non esistono metodi di ordine $q > 2$ zero-stabili.
Ordine massimo: $q = 2$.

Esercizio 4