COGNOME ____ NOME ____ N. Matricola ____

FIRMA ____

# Analisi Numerica I - 5 Appello a.a. 2018–2019

11 settembre 2019

## Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Posto $P = diag(4\ 2\ 4)$, $N = P - A$, $B = P^{-1}N$ e $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{b}$, si consideri il metodo iterativo

$$\text{dato } \mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k \geq 0. \tag{2}$$

1. Verificare se il metodo iterativo (2) converge.
2. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ si calcolino tre iterazioni del metodo (2) per risolvere il sistema lineare (1), eseguendo i calcoli in aritmetica esatta.

## Esercizio 2

Si vuole approssimare

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \tag{3}$$

con la seguente formula di quadratura:

$$I_3(f) = \alpha f(-1) + \beta f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \beta f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \alpha f(1) \tag{4}$$

Si determino $\alpha$ e $\beta$ in modo da avere il massimo grado di esattezza possibile. La formula risultante è aperta o chiusa?
Con $\alpha$ e $\beta$ trovati,

1. si determini il grado di esattezza del metodo (4).
2. si consideri $f(x) = e^x$ e si calcolino l'approssimazione dell'integrale (3) e l'errore commesso. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre per la mantissa.

## Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

si consideri la famiglia di metodi lineari espliciti a due passi:

$$u_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha u_{n-1} + \frac{h}{2}[(3+\alpha)f(t_n, u_n) + (\alpha - 1)f(t_{n-1}, u_{n-1})] \tag{6}$$

1. Trovare le condizioni su $\alpha$ affinché il metodo (6) risulti consistente e zero-stabile.
2. Tra i metodi zero-stabili della famiglia (6) trovare il metodo di ordine massimo.

## Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo predictor-corrector per l'approssimazione della soluzione $y(t)$ di un problema di Cauchy della forma

$$\begin{aligned} &y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T) \\ &y(t_0) = y_0 \,, \end{aligned}$$

che usa come metodo predictor il metodo di Adams-Bashforth a due passi

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1}))\,,$$

e come metodo corrector il metodo di Adams-Moulton a tre passi

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24}(9f(t_{n+1}, u_{n+1}) + 19f(t_n, u_n) - 5f(t_{n-1}, u_{n-1}) + f(t_{n-2}, u_{n-2}))\,.$$

La funzione deve ricevere in input la funzione $f(\cdot,\cdot)$, l'istante iniziale $t_0$, il valore iniziale $y_0$, l'ampieza dell'intervallo $T$ e il numero di sottointervalli da considerare $N$. Deve restituire la coppia di vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$ tale che $u_n \approx y(t_n)$.