COGNOME ____ NOME ____ N. Matricola ____

FIRMA ____

Analisi Numerica I - 4 Appello a.a. 2018–2019

12 luglio 2019

Esercizio 1

Sia data la matrice A così definitia:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 28 & 21 \\ 3 & 17 & 19 \\ 4 & 19 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Trovare in funzione di α, la fattorizzazione di Crout $A = LU$ ($u_{i,i} = 1$).
2. Dire per quali valori di α i minori principali di A sono non nulli.
3. Posto $\alpha = 26$ e considerato il vettore $\mathbf{b} = (91\ 64\ 83)^T$, utilizzando la fattorizzazione calcolata al punto 1., si risolva il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Si eseguano i calcoli in aritmetica esatta.

Soluzione

1. Calcolando le matrice L e U col metodo di Crout si ha:

$$L = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & \alpha - 18 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. I minori principali sono tutti non nulli se e solo se L e U esistono e L è non singolare, quindi per $\alpha \neq 18$.

3.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} : \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} : \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Sia dato il problema di punto fisso

$$x = \sqrt{x+6} - 1 \qquad x \in [1,2]. \tag{2}$$

1. Dimostrare che esiste un unico punto fisso $\alpha \in [1,2]$
2. Dire se il metodo iterativo di punto fisso

$$x^{(k+1)} = \sqrt{x^{(k)} + 6} - 1 \qquad x^{(0)} = 1 \tag{3}$$

   converge e con quale ordine.

3. Utilizzando 6 cifre per la mantissa, si calcolino 5 elementi della successione (**??**) e si calcoli un'approssimazione della velocità di convergenza.

Soluzione
L'esercizio si risolve applicando il teorema di esistenza, unicità e convergenza globale per i problemi di punto fisso.

1. Ponendo $\Phi(x) = \sqrt{x+6} - 1$, si osserva facilemte che:
   (a) $\Phi(x) \in C^1([1,2])$ e $\Phi'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x+6}-1)} > 0$, $\forall x \in [1,2]$;
   (b) $\Phi(x) : [1,2] \to [1,2]$ in quanto crescente e $[\Phi(1), \Phi(2)] \approx [1.64575, 1.82843] \subset [1,2]$
   (c) $\Phi'(x)$, è decrescente per ogni $x \in [1,2]$, e quindi $L = \max |\Phi'(x)| = \Phi'(1) \approx 0,3 < 1$.

   Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di esistenza e convergenza globale e si ha che esiste un unico punto fisso $\alpha \in [1,2]$ e il metodo (**??**) converge per ogni $x^{(0)} \in [1,2]$.

2. In particolare il metodo (**??**) converge per $x^{(0)} = 1$. Converge con ordine $p = 1$ in quanto $\Phi'(x)$ non si annulla mai in $[1,2]$.

3.

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= \sqrt{x^{(0)} + 6} - 1 = 1.64575 \\
x^{(2)} &= \sqrt{x^{(1)} + 6} - 1 = 1.76509 \\
x^{(3)} &= \sqrt{x^{(2)} + 6} - 1 = 1.78659 \\
x^{(4)} &= \sqrt{x^{(3)} + 6} - 1 = 1.79045
\end{aligned}$$

   Velocità di convergenza stimata: $R \approx -\log(\Phi'(x^{(4)})) = -log\left(\frac{1}{2\sqrt{x^{(4)}+6}}\right) = -\log(1.79045) = 1.7196$

subsection*Esercizio 3 Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

si consideri il generico metodo lineare esplicito a due passi:

$$u_{n+1} = a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + h[b_0 f(t_n, u_n) + b_1 f(t_{n-1}, u_{n-1})] \tag{5}$$

1. Determinare i parametri del metodo (**??**) in modo da avere il massimo ordine di consistenza.

2. Il metodo ottenuto è zero-stabile?

Soluzione

1. Il metodo è a due passi, quinadi $p = 1$. Avendo 4 parametri da calcolare posso imporre che il metodo sia almeno di ordine $q = 3$:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{p} a_j = a_0 + a_1 = 1 \\ \sum_{j=0}^{p} (-j) a_j + \sum_{j=0}^{p} b_j = -a_1 + b_0 + b_1 = 1 \\ \sum_{j=0}^{p} (-j)^2 a_j + 2 \sum_{j=0}^{p} (-j) b_j = a_1 - 2b_1 = 1 \\ \sum_{j=0}^{p} (-j)^3 a_j + 3 \sum_{j=0}^{p} (-j)^2 b_j = -a_1 + 3b_1 = 1 \end{cases}$$

Considerando la terza e la quarta equazioni si trova: $a_1 = 5$ e $b_1 = 2$.
Dalla seconda si calcola: $b_0 = 4$ e dalla prima $a_0 = -4$.
Il metodo ottentuo è:

$$u_{n+1} = -4u_n + 5u_{n-1} + h[4f(t_n, u_n) + 2f(t_{n-1}, u_{n-1})] \tag{6}$$

Ha ordine $q = 3$, in quanto la condizione per avere un metodo di ordine almeno 4 non è soddisfatta. Infatti:

$$\sum_{j=0}^{p} (-j)^4 a_j + 4 \sum_{j=0}^{p} (-j)^3 b_j = a_1 - 4b_1 = 5 - 8 = -3 \neq 1$$

2. Per studiare la zero-stabilità si calcolano le radici del polinomio

$$\rho(r) = r^2 - a_0 r - a_1 = r^2 - 5r - 4 = (r - 1)(r + 5)$$

La radice $r_1 = -5$ è in modulo maggiore di 1. Il metodo non è zero-stabile.

Esercizio 4