Analisi Numerica I - 3 Appello a.a. 2018–2019- CORREZIONE

19 giugno 2019

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Verificare che i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono.

2. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, dopo aver scritto il metodo di Jacobi per il sistema (1), si calcolino 3 iterazioni del metodo di Jacobi eseguendo i calcoli in aritmetica esatta.

Soluzione

1. Si osservi che la matrice è simmetrica e definita positiva, in quanto i minori principali sono positivi: $A_1 = 5$, $A_2 = 9$ e $A_3 = 9$. Di conseguenza il metodo di Gauss-Seidel converge. Per il metodo di Jacobi serve verificare che anche la matrice $2D - A$, essendo D la matrice diagonale di A, sia simmetrica e definita positiva. I minori di $2D - A$ coincidono con i minori di A e quindi anche Jacobi converge.

2. Il metodo di Jacobi per il sistema dato si scrive nel modo seguente: dato $\mathbf{x}^{(0)}$ si calcola

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(9 - x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(3 - x_1^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left(6 - 3x_1^{(k)}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Considerando $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ e utilizzando 6 cifre per la mantissa si ottiene:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{39}{25} \\ \frac{27}{20} \\ \frac{17}{10} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Sia data la tabella seguente relativa alla funzione $f(x) = e^x$.

x_i	1.3	1.5	1.7
y_i	3.6693	4.4817	5.4739

1. Stimare $f(x)$ in $\bar{x} = 1.4$, usando i dati della tabella precedente, utilizzando 5 cifre per la mantissa.
2. Calcolare l'errore commesso e stimare l'errore commesso (si approssimi la derivata coinvolta nella stima con il massimo del modulo della stessa).

Soluzione

1. Utilizzando l'interpolazione di Lagrange con polinomi di grado $n = 2$ si ottiene:

$$P_2(x) = 3.6693\frac{(x-1.5)(x-1.7)}{(1.3-1.5)(1.3-1.7)}+4.4817\frac{(x-1.3)(x-1.7)}{(1.5-1.3)(1.5-1.7)}+5.4739\frac{(x-1.3)(x-1.5)}{(1.7-1.3)(1.7-1.5)}$$

   Calcolano ora $P_2(x)$ in $\bar{x} = 1.4$ si ottiene:

$$\begin{aligned} P_2(1.4) &= 3.6693\frac{(-0.1)(-0.3)}{(-0.2)(-0.4)} + 4.4817\frac{(0.1)(-0.3)}{(0.2)(-0.2)} + 5.4739\frac{(0.1)(-0.1)}{(0.4)(0.2)} \\ &= \frac{3}{8}3.6693 + \frac{3}{4}4.4817 - \frac{1}{8}5.4739 = 4.0530 \end{aligned}$$

   Di conseguenza: $f(1.4) = e^{1.4} \approx 4.0530$

2. Errore commesso: $E = |f(1.4) - P_2(1.4)| = 0.0022$

   Errore stimato. Dal teorema dell'errore si ha:

$$|E_2(x)| = \left|\frac{1}{3!}f'''(\xi)\omega_3(x)\right| \leq \frac{1}{3!}\|f'''(x)\|_\infty|\omega_3(x)| \quad \text{con} \quad \omega_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

   Nel nostro caso, $\|f'''(x)\|_\infty = f'''(1.7) = 5.4740$ e per $\bar{x} = 1.4$, si ha:
   $\omega_3(1.4) = (1.4-1.3)(1.4-1.5)(1.4-1.7) = 0.003$. Si ottiene quindi la seguente stima per l'errore:

$$E_2(1.4) \leq 0.16667 \cdot 5.4740 \cdot 0.003 = 0.0027371$$

.

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

si consideri il seguente schema numerico:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + h[f(t_{n-1}, u_{n-1}) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \qquad n = 2, \ldots, N_h - 1 \tag{4}$$

1. Studiare consistenza, ordine e assoluta stabilità del metodo (4);
2. Indicare un modo opportuno di scegliere u_1 e motivare la risposta.

Soluzione Il metodo assegnato è un metodo multistep lineare a due passi implicito con

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1; \qquad b_{-1} = 1, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

1. <u>Consistenza</u>:

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 0 + 1 = 1; \qquad -\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 0 + (-1) + 1 + 0 + 1 = 1 : \quad \text{OK}$$

   <u>Ordine</u>:

$$\sum_{j=0}^{p} j^2 a_j - 2 \sum_{j=-1}^{p} j b_j = 0 + 1 - 2(-1 + 0 + 1) = 1 : \quad \text{ordine almeno 2}$$

$$-\sum_{j=0}^{p} j^3 a_j + 3 \sum_{j=-1}^{p} j^2 b_j = -(0 + 1) + 3(1 + 0 + 1) = 5 \neq \quad \text{ordine: q=2}$$

   <u>Assoluta stabilità</u>: applicando il metodo (4) al problema modello con $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\Re(\lambda) \in \mathbb{R}^-$, si ottiene:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + h\lambda(u_{n-1} + u_{n+1})$$

   Considerando il polinomio caratteristico si ha: $(1 - h\lambda)r^2 - (1 + h\lambda) = 0$ da cui si ricava:

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1 + h\lambda}{1 - h\lambda}}.$$

   Essendo $\Re(\lambda) < 0$, si ha $|r_{1,2}| < 1 \quad \forall h > 0$ e quindi il metodo risulta assolutamente incondizionatamente stabile.

2. Essendo il metodo (4) un metodo di ordine $q = 2$, un modo opportuno per calcolare u_1 consiste nel considerare un metodo ad un passo di ordine $q = 2$, come ad esempio, il metodo di Heun.

Esercizio 4