COGNOME ____ NOME ____ N. Matricola ____

FIRMA ____

# Analisi Numerica I - 3 Appello a.a. 2018–2019

19 giugno 2019

## Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Verificare che i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono.
2. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, si calcolino 3 iterazioni del metodo di Jacobi eseguendo i calcoli in aritmetica esatta.

## Esercizio 2

Sia data la tabella seguente (con passo h=0.2)

| $x_i$ | 1.3 | 1.5 | 1.7 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3.6693 | 4.4817 | 5.4739 |

relativa alla funzione $f(x) = e^x$.

1. Stimare $f(x)$ in $\bar{x} = 1.4$, usando i dati della tabella precedente. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre per la mantissa.

2. Calcolare l'errore commesso e stimare l'errore commesso (si approssimi la derivata coinvolta nella stima con il massimo del modulo della stessa).

## Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

si consideri il seguente schema numerico:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + h[f(t_{n-1}, u_{n-1}) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \qquad n = 2, \ldots, N_h - 1 \tag{3}$$

1. Studiare consistenza, ordine e assoluta stabilità del metodo (3).
2. Indicare un modo opportuno di scegliere $u_1$ e motivare la risposta.

## Esercizio 4

Scrivere uno script di Matlab che

i) disegni i grafici delle funzioni $f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) e^{-x}$ e $g(x) = \frac{x^2}{3+x}$ nell'intervallo $[-2, 2]$;

ii) approssimi (usando comandi già presenti in Matlab) i punti $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ con $-2 < P_1 < Q_1 < 2$, dove si intersecano i due grafici;

iii) approssimi (usando comandi già presenti in Matlab) $\int_{P_1}^{Q_1} (f - g)(x)\, dx$;

iv) calcoli il polinomio $\Pi(x)$ che interpola la funzione $(f - g)(x)$ in 5 punti equispaziati dell'intervallo $[P_1, Q_1]$ (estremi compresi);

v) disegni i grafici delle funzioni $(f - g)(x)$ e $\Pi(x)$ nell'intervallo $[-2, 2]$;

vi) calcoli (usando comandi già presenti in Matlab) $\int_{P_1}^{Q_1} \Pi(x)\, dx$.