Analisi Numerica I - 2 Appello a.a. 2018–2019 - CORREZIONE
08 febbraio 2019

Esercizio 1

Per approssimare l'integrale definito:

$$\int_0^1 e^{1-\frac{x}{2}} dx \tag{1}$$

si utilizzi il metodo di Cavalieri-Simpson composito in modo da garantire che l'errore sia minore di 10^{-5}. Utilizzando 7 cifre per la mantissa, si verifichi il risultato ottenuto calcolando l'errore effettivamente commesso.

Soluzione

1. Stima dell'errore per il metodo di Cavalieri-Simpson:

$$E_{CS} \leq \frac{b-a}{180} \|f^{IV}\|_\infty \left(\frac{H}{2}\right)^4 = \frac{b-a}{180} \|f^{IV}\|_\infty h^4 \tag{2}$$

essendo $H = 2h = \frac{b-a}{M}$ e $n = 2M$. Di conseguenza n deve essere pari.

$$\|f^{IV}\|_\infty = \max_{[0,1]} f^{IV}(x) = \frac{1}{16} \max_{[0,1]} e^{1-\frac{x}{2}} = \frac{e}{16}$$

Utilizzando la stima in h, si ottiene in numero totale di suddivisione dell'intervallo di integrazione. Si ha:

$$E_{CS} \leq \frac{b-a}{180} \|f^{IV}\|_\infty h^4 = \frac{b-a}{180} \|f^{IV}\|_\infty \left(\frac{b-a}{n}\right)^4 < 10^{-5}$$

da cui si ricava:

$$n > \left(10^5 \frac{(b-a)^5}{180} \|f^{IV}\|\right)^{\frac{1}{4}} = \left(10^5 \cdot \frac{1}{180} \cdot \frac{e}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 3.11.$$

Si ricava quindi: $n = 4$ o, equivalentemente, $M = 2$.

2. Calcolo dell'approssimazione dell'integrale (1). $n = 4$ per cui $h = .25$ e i nodi della formula di quadratura sono: $x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$

$$\begin{aligned}
I_{CS} &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1,3,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-2} f(x_i)\right] \\
&= \frac{.25}{3}\left[f(0) + f(1) + 4(f(.25) + f(.75)) + 2f(.5)\right] \\
&= 0.0833333 \cdot [1 + 2.718282^{.5} + 4(2.718282^{.875} + 2.718282^{.625}) + 2 \cdot 2.718282^{.75}] \\
&= 0.0833333 \cdot [2,718282 + 1.648721 + 4(2.398875 + 1.868246) + 2 \cdot 2.117000] \\
&= 0.0833333 \cdot 25.669489 = 2.139124
\end{aligned} \tag{3}$$

$$I = -2e^{1-\frac{x}{2}}|_0^1 = -2 \cdot (2.718282^{\frac{1}{2}} - 2.718282) = 2 \cdot 2.139121$$

$$E_{CS} = |I - I_{CS}| = |2.139124 - 2.139124| = .3 \cdot 10^{-5} < 10^{-5}$$

Esercizio 2

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

1. Elencare le proprietà della matrice A ritenute significative e dire quali metodi iterativi studiati possono essere utilizzati per il calcolo della soluzione del sistema lineare (4).
2. Indicando con B_J la matrice di iterazione del metodo di Jacobi e con D la matrice diagonale i cui elementi coincidono con gli elementi della diagonale di A, si determinino di $\omega \in \mathbb{R}$ per cui risulta consistente il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega(B_J\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}) + (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)}. \tag{5}$$

3. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, si applichi il metodo (5) al sistema lineare (4) e si calcoli $\mathbf{x}^{(2)}$, con $\omega = \frac{1}{2}$. Si eseguano i calcoli in aritmetica esatta.

Soluzione

1. La matrice A è tridiagonale, simmetrica e definita positiva ($A_1 = 2;\ A_2 = 3;\ A_3 = 4$). Convergono tutti metodi iterativi studiati: Jacobi e Gauss-Seidel, essendo la matrice tridiagonale, simmetrica e definita positiva. Gradiente e gradiente coniugato in quanto metodi ad hoc per matrici simmetriche e definite positive. Gradiente coniugato converge in al più tre iterazioni, essendo $n = 3$.
2. Il metodo proposto è il metodo JOR, per cui è consistente $\forall \omega \neq 0$.
3.

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Matrice di iterazione per $\omega = \frac{1}{2}$:

$$B = \omega B_J + (1-\omega)I = \begin{pmatrix} (1-\omega) & -\frac{1}{2}\omega & 0 \\ -\frac{1}{2}\omega & 1-\omega & -\frac{1}{2}\omega \\ 0 & -\frac{1}{2}\omega & 1-\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Metodo iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \frac{1}{2}D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{4}x_2^{(k)} - \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{1}{4}x_3^{(k)} \\ -\frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Calcolo $\mathbf{x}^{(2)}$:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

si consideri il seguente schema numerico:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n)\right) & n = 1, \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases} \tag{7}$$

Dire se il metodo (7) è

1. consistente e qual è l'ordine di consistenza;
2. assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$y'(t) = -10y(t), \quad t > 0; \qquad y(0) = 1$$

per $h = \frac{1}{4}$ e $h = \frac{1}{6}$.

Soluzione

1. Il metodo (7) è il metodo di Eulero modificato e quindi un metodo di Runge-Kutta a due stadi di ordine $p = 2$.
2. La condizione di assoluta stabilità per i metodi di Runge-Kutta a due stadi di ordine $p = 2$ è la seguente:

$$\left| \frac{(h\lambda)^2}{2} + h\lambda + 1 \right| < 1.$$

Essendo $\lambda = -10$, la condizione diventa $h < \frac{1}{5}$ per cui per $h = \frac{1}{4}$ il metodo non è assoultamente stabile e per $\frac{1}{6}$ il metodo è assolutamente stabile.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo iterativo JOR per l'approssimazione della soluzione di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\
&\text{Per } k \geq 0 \\
&\quad D\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega \left[\mathbf{b} + (E+F)\mathbf{x}^{(k)}\right] + (1-\omega)D\mathbf{x}^{(k)}\,.
\end{aligned}$$

D è la matrice diagonale con la stessa diagonale di A, $E + F = D - A$ e $\omega > 0$ è un parametro di rilassamento.
La funzione deve ricevere in ingresso la matrice A, il vettore $\mathbf{b}$ e il parametro di rilassamento ω, e restituire la soluzione approssimata $\mathbf{x}$, il residuo $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\|$, e il numero d'iterazioni fatte.
Deve scegliere $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ e si deve fermare se il residuo relativo $\frac{\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ è minore di 10^{-8} oppure se si superano le 500 iterazioni.