COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

FIRMA [ ]

Analisi Numerica I - 2 Appello a.a. 2018–2019

08 febbraio 2019

Esercizio 1

Per approssimare l'integrale definito:

$$\int_0^1 e^{1-\frac{x}{2}} dx$$

si utilizzi il metodo di Cavalieri-Simpson composito in modo da garantire che l'errore sia minore di 10^{-5}. Utilizzando 7 cifre per la mantissa, si verifichi il risultato ottenuto calcolando l'errore effettivamente commesso.

Esercizio 2

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Elencare le proprietà della matrice A ritenute significative e dire quali metodi iterativi studiati possono essere utilizzati per il calcolo della soluzione del sistema lineare (1).

2. Indicando con B_J la matrice di iterazione del metodo di Jacobi e con D la matrice diagonale i cui elementi coincidono con gli elementi della diagonale di A, si determinino di $\omega \in \mathbb{R}$ per cui risulta consistente il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega(B_J x^{(k)} + D^{-1}b) + (1-\omega)x^{(k)}. \tag{2}$$

3. Posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, si applichi il metodo (2) al sistema lineare (1) e si calcoli $\mathbf{x}^{(2)}$, con $\omega = \frac{1}{2}$. Si eseguano i calcoli in aritmetica esatta.

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

si consideri il seguente schema numerico:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n)\right) & n = 1, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Dire se il metodo (3) è

1. consistente e qual è l'ordine di consistenza;
2. assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$y'(t) = -10y(t), \quad t > 0; \qquad y(0) = 1$$

per $h = \frac{1}{4}$ e $h = \frac{1}{6}$.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo iterativo JOR per l'approssimazione della soluzione di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ &\text{Per } k \geq 0 \\ &\quad D\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega\left[\mathbf{b} + (E+F)\mathbf{x}^{(k)}\right] + (1-\omega)D\mathbf{x}^{(k)}\,. \end{aligned}$$

D è la matrice diagonale con la stessa diagonale di A, $E + F = D - A$ e $\omega > 0$ è un parametro di rilassamento.

La funzione deve ricevere in ingresso la matrice A, il vettore $\mathbf{b}$ e il parametro di rilassamento ω, e restituire la soluzione approssimata $\mathbf{x}$, il residuo $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\|$, e il numero d'iterazioni fatte.

Deve scegliere $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ e si deve fermare se il residuo relativo $\frac{\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ è minore di 10^{-8} oppure se si superano le 500 iterazioni.