Analisi Numerica I - 1 Appello a.a. 2018–2019
Correzione 22 gennaio 2019

## Esercizio 1

Siano dati la matrice $A$ e il vettore $\mathbf{b}$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Elencare le proprietà della matrice $A$ ritenute significative.

2. Alla luce del punto 1, risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo ritenuto più opportuno, scrivendo prima per esteso le formule che verranno utilizzate. Eseguire i calcoli utilizzando 5 cifre per la mantissa.

### Soluzione

1. La matrice $A$ è

   - tridiagonale essendo $a_{3,1} = a_{1,3} = 0$,
   - definita positiva essendo i minori principali $A_1 = 2$, $A_2 = 2 - 1 = 3$, $A_3 = \det(A) = 1$ maggiori di zero.

2. Per le proprietà elencate, il metodo più opportuno è il metodo di Thomas .

   - Formule:

$$L \text{ e } U: \; u_{1,1} = a_{1,1}, \quad \ell_{i,i-1} = \frac{a_{i,i-1}}{\ell_{i-1,i-1}}, \quad u_{i,i} = a_{i,i} - \ell i, i-1 a_{i-1,i}, \quad u_{i,i+1} = a_{i,i+1} \qquad i = 2,3$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}: \qquad y_1 = b_1; \quad y_i = b_i - \ell_{i,i-1} y_{i-1}, \quad i = 2,3$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}: \qquad x_3 = \frac{y_3}{u_{3,3}}; \quad x_i = \frac{y_i - u_{i,i+1} x_{i+1}}{u_{i,i}}, \quad i = 3,2$$

   - Eseguendo i calcoli con 5 cifre per la mantissa risulta:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1.3333 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1.6667 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.33333 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

## Esercizio 2

Per trovare la soluzione del problema di punto fisso:

$$x = 1 + \frac{1}{2}\sin(x) \qquad x \in [0, \pi],$$

si consideri il seguente metodo iterativo:

$$\text{dato } x^{(0)} \in [0, \pi], \quad x^{(k+1)} = 1 + \frac{1}{2}\sin(x^{(k)}), \qquad k \geq 0. \tag{1}$$

1. Si dimostri la convergenza globale del metodo (1).
2. Si determini l'ordine del metodo (1).
3. Posto $x^{(0)} = 0.5$, e dopo aver eseguito 4 iterazioni del metodo, si calcoli un'approssimazione del fattore asintotico di convergenza.

### Soluzione

1. Convergenza globale. Per la dimostrazione è necessario applicare il teorema di esistenza e convergenza globale dei problemi di punto fisso. Si osservi che:

   (a) $\Phi(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(x) \in C^1([0, \pi])$.

   (b) $\min_{[0,\pi]} \Phi(x) = \Phi(0) = \Phi(\pi) = 1$ e $\max_{[0,\pi]} \Phi(x) = \Phi(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$ e che $\Phi'(x) = \frac{1}{2}\cos(x) \geq 0,\ \forall x \in [0, \pi]$, da cui segue che $\Phi(x)$ è non decrescente in $[0, \pi]$ e che $\Phi([0, \pi]) = [1, \frac{3}{2}] \subset [0, \pi]$

   (c) $\max_{[0,\pi]} |\Phi'(x)| = \max_{[0,\pi]} |\frac{1}{2}\cos(x)| = \frac{1}{2} < 1$.

   Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di esistenza e convergenza, e di conseguenza: $\exists! \alpha \in [0, \pi]$ t.c. $\alpha = \Phi(\alpha) \in [0, \pi]$ e il metodo (1) converge $\forall x^{(0)} \in [0, \pi]$.

2. Ordine del metodo. Si osservi che

   $$\Phi'(x) = \frac{1}{2}\cos(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$

   e che $\frac{\pi}{2} \neq \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e quindi $\frac{\pi}{2} \neq \alpha$. Di conseguenza, $\Phi'(\alpha) \neq 0$ e l'ordine del metodo è $p = 1$.

3. Applicando il metodo (1), si ottiene:

   | $x^{(0)}$ | $x^{(1)}$ | $x^{(2)}$ | $x^{(3)}$ | $x^{(4)}$ |
   |---|---|---|---|---|
   | 0.5 | 1.2397 | 1.4728 | 1.4976 | 1.4987 |

   Approssimazione del fattore asintotico di convergenza:

   $$x^{(4)} \approx \alpha \quad \Rightarrow \quad |\Phi'(\alpha)| \approx |\Phi'(x^{(4)}|) = 0.036017 = 0.36017 \cdot 10^{-1}$$

   In alternativa:

   $$\left| \frac{x^{(4)} - x^{(3)}}{x^{(3)} - x^{(2)}} \right| \approx 0.44354 \cdot 10^{-1}.$$

## Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{h}{4}[7f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})] & n = 1, \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0, u_1 \text{assegnato} \end{cases} \tag{2}$$

Dire se il metodo (2) è

1. consistente e qual è l'ordine di consistenza;
2. zero-stabile;
3. assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$y'(t) = -y(t), \quad t > 0; \qquad y(0) = 1.$$

**Soluzione** Si osservi innanzitutto che il metodo (2) è un metodo multistep lineare esplicito a due passi $p = 1$ con coefficienti:

$$a_0 = a_1 = \frac{1}{2};\ b_{-1} = 0,\ b_0 = \frac{7}{4},\ b_1 = -\frac{1}{4}.$$

di conseguenza, per risolvere l'esercizio, si farà riferimento alla teoria di metodi multistep lineari.

1. Consistenza e ordine:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p} a_j &= a_0 + a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ -\sum_{j=0}^{p} a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j &= -a_1 + b_0 + b_1 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = 1 \\ \sum_{j=0}^{p}(-j)^2 a_j + 2\sum_{j=-1}^{p}(-j)^1 b_j &= a_1 - 2b_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 \\ \sum_{j=0}^{p}(-j)^3 a_j + 3\sum_{j=-1}^{p}(-j)^2 b_j &= -a_1 + 3b_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4} \neq 1 \end{aligned} \tag{3}$$

   Il metodo risulta quindi consistente di ordine $q = 2$.

2. Zero-stabilità equivale alla condizione delle radici: radici $r_j$ di $\rho(r) = \sum_{j=0}^{p} a_j r^{-j}$ t.c. $|r_j| \leq 1$ con radici di modulo 1 semplici.

$$\rho(r) = r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = (r-1)(r + \frac{1}{2}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_0 = 1,\ r_1 = -\frac{1}{2}$$

   Condizione delle radici soddisfatta e metodo zero-stabile.

3. Assoluta stabilità equivale a condizione assoluta delle radici: radici $r(h\lambda)_j$ di $\Pi(r) = \rho(r) - h\lambda\sigma(r)$ t.c. $|r_j(h\lambda)| < 1$ con $h\lambda \neq 0$. Per l'esercizio, essendo $\lambda = -1$, si ha:

$$\Pi(r) = r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} + \frac{h}{4}(7r-1) = \frac{1}{4}\left[4r^2 - (2-7h)\,r - (2+h)\right] = 0$$

Radici:

$$r_0(-h) = \frac{2 - 7h - \sqrt{36 + 49h^2 - 12h}}{8}; \qquad r_1(-h) = \frac{2 - 7h + \sqrt{36 + 49h^2 - 12h}}{8}$$

Essendo $36 + 49h^2 - 12h > 0$ per ogni $h$ in quanto somma di quantità positive, verificare se esistono valori di $h$ per cui $|r_0(-h)| < 1$ e $|r_1(-h)| < 1$, equivale a verificare se esistono valori di $h$ per cui

$$-10 + 7h < -\sqrt{36 + 49h^2 - 12h} < +\sqrt{36 + 49h^2 - 12h} < 6 + 7h.$$

La disuguaglianza di destra diventa:

$$\sqrt{36 + 49h^2 - 12h} < 6 + 7h \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 6 + 7h > 0 \\ 36 + 49h^2 - 12h < (6+7h)^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall h > 0.$$

La disuguaglianza di sinistra diventa:

$$\sqrt{36 + 49h^2 - 12h} < 10 - 7h \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 10 - 7h > 0 \\ 36 + 49h^2 - 12h < (10-7h)^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad h < \frac{1}{2}.$$

Quindi il metodo risulta assolutamente stabile per $h < \frac{1}{2}$.

## Esercizio 4

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T) \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

1. Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo di Runge-Kutta per l'approssimazione della soluzione:

$$\begin{aligned} & u_0 = y_0 \\ & \text{Per } i \geq 0 \\ & \quad K1 = f(t_i, u_i) \\ & \quad K2 = f(t_i + \tfrac{2h}{3}, u_i + \tfrac{2h}{3}\,K1) \\ & \quad K3 = f(t_i, u_i + h(-K1 + K2)) \\ & \quad u_{n+1} = u_n + \tfrac{h}{4}(3\,K2 + K3)\,, \end{aligned}$$

   essendo $t_i = t_0 + i\,h$.

2. Scrivere uno script di Matlab dove si approsimi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t(y(t)+1)^2 & t \in (0,1) \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

   usando questo metodo di Runge-Kutta, si disegni il grafico della soluzione esatta $y(t) = \frac{2}{t^2+1} - 1$ e della soluzione approssimata e si calcoli l'errore.