COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

FIRMA [ ]

Analisi Numerica I - 1 Appello a.a. 2018–2019

22 gennaio 2019

Esercizio 1

Siano dati la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Elencare le proprietà della matrice A ritenute significative.
2. Alla luce del punto 1, risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo ritenuto più opportuno, scrivendo prima per esteso le formule che verranno utilizzate. Eseguire i calcoli utilizzando 5 cifre per la mantissa.

Esercizio 2

Per trovare la soluzione del problema di punto fisso:

$$x = 1 + \frac{1}{2}\sin(x) \qquad x \in [0, \pi],$$

si consideri il seguente metodo iterativo:

$$\text{dato } x^{(0)} \in [0, \pi], \quad x^{(k+1)} = 1 + \frac{1}{2}\sin(x^{(k)}), \qquad k \geq 0. \tag{1}$$

1. Si dimostri la convergenza globale del metodo (1).
2. Si determini l'ordine del metodo (1).
3. Posto $x^{(0)} = 0.5$, e dopo aver eseguito 4 iterazioni del metodo, si calcoli un'approssimazione del fattore asintotico di convergenza.

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{h}{4}[7f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})] & n = 1, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0, u_1 \text{assegnato} \end{cases} \tag{2}$$

Dire se il metodo (2) è

1. consistente e qual è l'ordine di consistenza;
2. zero-stabile;
3. assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$y'(t) = -y(t), \quad t > 0; \qquad y(0) = 1.$$

Esercizio 4

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T) \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$$

1. Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo di Runge-Kutta per l'approssimazione della soluzione:

$$\begin{aligned} & u_0 = y_0 \\ & \text{Per } i \geq 0 \\ & \quad K1 = f(t_i, u_i) \\ & \quad K2 = f(t_i + \tfrac{2h}{3}, u_i + \tfrac{2h}{3}\, K1) \\ & \quad K3 = f(t_i, u_i + h(-K1 + K2)) \\ & \quad u_{n+1} = u_n + \tfrac{h}{4}(3\, K2 + K3)\,, \end{aligned}$$

   essendo $t_i = t_0 + i\, h$.

2. Scrivere uno script di Matlab dove si approsimi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t(y(t) + 1)^2 \quad t \in (0, 1) \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

   usando questo metodo di Runge-Kutta, si disegni il grafico della soluzione esatta $y(t) = \frac{2}{t^2+1} - 1$ e della soluzione approssimata e si calcoli l'errore.