COGNOME ____ NOME ____ N. Matricola ____

FIRMA ____

Analisi Numerica I - Quinto appello a.a. 2017–2018

05 settembre 2018

Esercizio 1

Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{25}{36} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

1. Verificare che la matrice A è simmetrica e definita positiva.
2. Si risolva il sistema assegnato con il metodo di Cholesky, tenendo conto del fatto che la matrice A è anche tridiagonale.

Risoluzione

1. La matrice A è evidentemente simmetrica. I minori principali di A valgono: $A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $A_3 = \det(A) = 1$. Essendo tutti maggiori di zero, la matrice è definita positiva.
2. Per il metodo di Cholesky è noto che $!\exists L$ tale che $A = LL^T$. Essendo la matrice tridiagonale, la matrice L sarà bidiagonale e quindi $\ell_{3,1} = 0$ e le formule del metodo diventano:

$$\begin{aligned} \ell_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} \\ \ell_{i,i-1} &= \frac{a_{i,i-1}}{\ell_{i,i}}, \\ \ell_{i,i} &= \sqrt{a_{i,i} - \ell_{i,i-1}^2} \qquad (1) \\ i &= 2, 3. \qquad (2) \end{aligned}$$

si ottiene quindi:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Utilizzando l'interpolazione di Lagrange, si costruisca la parabolica a tratti a partire dai seguenti dati:

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$

1. Si scriva l'espressione della parabolica a tratti.
2. Si calcoli il valore della funzione trovata nei seguenti punti: $x = \frac{2}{3}$ e $x = \frac{5}{3}$.

Soluzione

1. Essendo 5 i punti assegnati, si dovranno definire due tratti di parabola, una nell'intervallo $[0, 1]$ e l'altra in $[1, 2]$. Si avrà;

$$\begin{aligned}
P_2^{(1)}(x) &= \frac{(x-1/2)(x-1)}{(-1/2)(-1)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x(x-1)}{(-1/2)(1/2)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x(x-1/2)}{1(1/2)} \cdot 0 \\
&= (1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad x \in [0,1] \qquad (3) \\
P_2^{(2)}(x) &= \frac{(x-3/2)(x-2)}{(-1/2)(-1)} \cdot 0 + \frac{(x-1)(x-2)}{(-1/2)(1/2)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-3/2)}{1(1/2)} \cdot \frac{1}{2} \\
&= (1-x)\left(3x-\frac{13}{2}\right) \qquad x \in [1,2] \qquad (4)
\end{aligned}$$

2. Per il calcolo del valore della parabolica composita nei punti dati si deve utilizzare l'espressione (**??**) nel punto $x = \frac{2}{3}$ e l'espressione (**??**) in $x = \frac{5}{3}$. Si ha:

$$P_2^{(1)}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{18} \qquad P_2^{(2)}\left(\frac{5}{3}\right) = 1.$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)u_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) h[f(t_{n-1}, u_{n-1}) - 3f(t_n, u_n)].$$

Si studino, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, consistenza e 0-stabilità.

Risoluzione

Il metodo proposto è un metodo multistep con

$$p = 1, \quad a_0 = \alpha, \quad a_1 = 1 - \alpha, \quad b_0 = 3\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad b_1 = \frac{\alpha}{2} - 1.$$

1. Consistenza. Metodo consistente se e solo se $a_0 + a_1 = 1$ e $-a_1 + b_0 + b_1 = 1$. Con i dati asseganti entrambe le uguaglianza sono vere $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e quindi il metodo risulta consistente senza nessuna condizione su α.

2. 0-stabilità. Metodo 0-stabile se e solo se è verificata la condizione delle radici. Si considera il polinomio $\rho(r) = r^2 - a_0 r - a_1 = r^2 - \alpha r - (1-\alpha)$, che ammette le due radici

   $$r_0 = 1 \qquad r_1 = \alpha - 1.$$

   Condizione delle radici soddisfatta se $|r_1| \leq 1$ ma $r_1 \neq 1$. Quindi: $-1 \leq \alpha - 1 < 1$ da cui si ricava che il metodo è 0-stabile se e solo se $0 \leq \alpha < 2$.