Analisi Numerica I - CORREZIONE
Quarto appello a.a. 2017–2018 16 luglio 2018

Esercizio 1

Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Volendo applicare il metodo di Jacobi, si ha che la matrice di iterazione $B_J(A) = I - D^{-1}A$, ha $\rho(B_J) > 1$. Scrivere, se esiste, una matrice di permutazione P tale che il sistema $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ sia risolvibile con il metodo di Jacobi.
2. Per tale nuovo sistema, si scriva la matrice di iterazione del metodo di Jacobi $B_J(PA)$ e le componenti del generico vettore della successione ottenuta.
3. Si calcolino due iterazioni del metodo, scegliendo come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (2\ 2\ 2)^T$.

Risoluzione

1. Si osserva che, si riesce ad ottenere una matrice a dominanza diagonale stretta, scambiano in successione la prima e la terza riga, poi la seconda con la nuova terza. La matrice di permutazione risulta quindi:
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Di conseguenza il sistema lineare $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, sarà:
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$
2. Si indichi con M la matrice dei coefficienti del sistema (1). La matrice di iterazione di Jacobi $B_J(M) = I - D^{-1}M$ sarà:
$$B_J(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$
e il metodo di Jacobi darà origine alla seguente successione:
$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{5}x_2^{(k)} + \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$
3. $$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ -\frac{15}{16} \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Si vuole approssimare con i metodi dei trapezi e di Cavalieri-Simpson il seguente integrale definito:

$$I = \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} dx \tag{2}$$

1. Per entrambi i metodi si calcoli il numero minimo di punti in cui suddividere l'intervallo di integrazione in modo da ottenere un errore $E \leq 10^{-3}$.
2. Utilizzando il numero di punti ottenuti al punto 1 si calcoli l'approssimazione dell'integrale (2) con il metodo dei trapezi e l'errore effettivamente commesso. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre.

Risoluzione

1. Per risolvere l'esercizio, si fa ricorso alle formule dell'errore per i due metodi:

$$E_T \leq \frac{b-a}{12} \|f''(x)\|_\infty H^2, \quad H = h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_{CS} \leq \frac{b-a}{180} \|f^{IV}(x)\|_\infty \left(\frac{H}{2}\right)^4, \quad H = 2h = 2\frac{b-a}{n},$$

avendo indicato con $n+1$ il numero totale dei punti utilizzati.
Calcolo delle derivate di $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$:

$$f^{(s)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^s f(x), \quad s \leq 1$$

da cui, ricordando che $f(x)$ è monotona crescente, si ha che:

$$\|f''(x)\|_\infty = \frac{e^{\cdot}5}{4} = .41218, \qquad \|f^{IV}(x)\|_\infty = \frac{e^{\cdot}5}{16} = .10305$$

Sostituendo nella formula dell'errore del metodo dei trapezi si ha:

$$E_T \leq \frac{b-a}{12} \|f''(x)\|_\infty H^2 = \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \|f''(x)\|_\infty = \frac{.41218}{12 \cdot n^2} \leq 10^{-3}$$

da cui si ricava

$$n \geq \sqrt{\frac{412.18}{12}} \approx 5.86 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

Sostituendo nella formula dell'errore del metodo di Cavalieri-Simpson si ha:

$$E_{CS} \leq \frac{b-a}{180} \|f^{IV}(x)\|_\infty \left(\frac{H}{2}\right)^4 = \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \|f^{(IV)}(x)\|_\infty = \frac{.10305}{180 \cdot n^4} \leq 10^{-3}$$

da cui si ricava

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{103.05}{2880}} \approx 0,35 \quad \Rightarrow \quad n = 2$$

2. Trapezi. $n = 5$, $h = \frac{1}{5} = 0.2$

$$
\begin{aligned}
I_T &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_6)] + h\sum_{i=1}^{5} f(x_i)] = .083333(e^0 + e^{\frac{1}{2}}) + .16667\sum_{i=1}^{5} e^{.083333i} \\
&= .083333(1 + 1.6487) + .16667(1.0869 + 1.1814 + 1.2840 + 1.3956 + 1.5169) = .083333 \cdot 2.6487 + 0.1 \\
&= 0.22072 + 1.0775 = 1.2982
\end{aligned}
$$

$$I_T = 1.2982 \qquad E_T = |I_T - I| = 1.2982 - 1.2974 = .0008$$

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo ad un passo, dipendente da un parametro $\alpha \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right) f(t_n, u_n) + \frac{2}{3}\alpha f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]. \tag{3}$$

Si determini per quali valori di h il metodo (4) risulta assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$\begin{aligned} &y'(x) = \lambda y(x), \qquad x > 0 \\ &y(0) = 1, \end{aligned} \tag{4}$$

con $\lambda \leq 0$.

Risoluzione

Due modi:

1. Si osservi che posto $\theta = \frac{2}{3}\alpha$, il metodo dato coincide con il θ-metodo. Quindi, ricordando i risultati del θ-metodo, cioè:
   - $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ metodo assolutamente incondizionatamente stabile;
   - $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ metodo assolutamente stabile se $(\theta - \frac{1}{2})h\lambda < 1$

   si ha:
   - $\frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$ metodo assolutamente incondizionatamente stabile;
   - $0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$ metodo assolutamente stabile se $(\frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{2})h\lambda < 1$ o, equivalentemente $(4\alpha - 3)h\lambda < 6$, cioè $h < \frac{6}{(4\alpha-3)\lambda}$

2. Applicando il metodo (3) al problema (4) si ottiene:

   $$u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right)(\lambda u_n) + \frac{2}{3}\alpha(\lambda u_{n+1})\right].$$

   ovvero

   $$u_{n+1} = \left(1 + \frac{3h\lambda}{3 - 2\alpha h\lambda}\right) u_n$$

   Si ha assoluta stabilità se e solo se

   $$\left|1 + \frac{3h\lambda}{3 - 2\alpha h\lambda}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2 < \frac{3h\lambda}{3 - 2\alpha h\lambda} < 0,$$

   essendo $\alpha \geq 0$. La disuguaglianza di destra è verificata $\forall h$ essendo il numeratore negativo e il denominatore positivo ($\lambda < 0$, $\alpha \geq 0$). La disuguaglianza di sinistra si può scrivere in modo equivalente come

   $$-6 + 4\alpha h\lambda < 3h\lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad (4\alpha - 3)h\lambda < 6 \tag{5}$$

   - Se $4\alpha - 3 \geq 0$ ovvero se $\alpha \geq \frac{3}{4}$ la disuguaglianza è verificata $\forall h$ e quindi il metodo risulta assolutamente incondizionatamente stabile;
   - se $0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$ il metodo è assolutamente stabile per quei valori di h per cui la condizione (5) è verificata.