COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

FIRMA ______

Analisi Numerica I - Quarto appello a.a. 2017–2018

16 luglio 2018

Esercizio 1

Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Volendo applicare il metodo di Jacobi, si ha che la matrice di iterazione $B_J(A) = I - D^{-1}A$, ha $\rho(B_J) > 1$. Scrivere, se esiste, una matrice di permutazione P tale che il sistema $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ sia risolvibile con il metodo di Jacobi.

2. Per tale nuovo sistema, si scriva la matrice di iterazione del metodo di Jacobi $B_J(PA)$ e le componenti del generico vettore della successione ottenuta.

3. Si calcolino due iterazioni del metodo, scegliendo come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (2\ 2\ 2)^T$.

Esercizio 2

Si vuole approssimare con i metodi dei trapezi e di Cavalieri-Simpson il seguente integrale definito:

$$I = \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} dx \tag{1}$$

1. Per entrambi i metodi si calcoli il numero minimo di punti in cui suddividere l'intervallo di integrazione in modo da ottenere un errore minore o uguale a 10^{-3}.

2. Utilizzando il numero di punti ottenuti al punto 1 si calcoli l'approssimazione dell'integrale (1) con il metodo dei trapezi e l'errore effettivamente commesso. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre.

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo ad un passo, dipendente da un parametro $\alpha \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + h\left[\left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right) f(t_n, u_n) + \frac{2}{3}\alpha f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]. \tag{2}$$

Si determini per quali valori di h il metodo (3) risulta assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$\begin{aligned} &y'(x) = \lambda y(x), \qquad x > 0 \\ &y(0) = 1, \end{aligned} \tag{3}$$

con $\lambda \leq 0$.

Esercizio 4

Scrivere uno **script** di Matlab che approssimi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t) - 1)t \quad t \in (0, 1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Crank-Nicolson.
Lo script deve permettere di scegliere il dato iniziale y_0 e il numero di sottointervalli da usare nell'approssimazione, e deve disegnare il grafico della soluzione approssimata.