COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - Terzo appello a.a. 2017–2018

22 giugno 2018

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Dire se la matrice A è simmetrica e definita positiva.
2. Si calcolino la matrice diagonale D e la matrice triangolare inferiore L con $\ell_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, 3$ tali che $A = LDL^T$.
3. Si utilizzi la fattorizzazione trovata per risolvere il sistema (1).

Risoluzione

1. La matrice A è evidentemente simmetrica. Avendo un elemento negativo sulla diagonale principale, non è però definita positiva.
2. Ponendo:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ 0 & \ell_2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} & d_1 = a_{11}, \\ & \begin{cases} \ell_i = a_{ii+1}/d_i \\ d_{i+1} = a_{i+1i+1} - d_i \ell_i^2 \end{cases} \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

e quindi:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

3. Essendo $A = LDL^T$ per risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ basta risolvere i tre sitemi lineari:

$$\begin{aligned} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad & \longrightarrow \quad \mathbf{y} = (-1, \ \ 4, \ \ 2.2)^T, \\ D\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad & \longrightarrow \quad \mathbf{z} = (-1, \ \ -0.8, \ \ 1)^T \\ L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad & \longrightarrow \quad \mathbf{x} = (1, \ \ -1, \ \ 1) \end{aligned}$$

Esercizio 2

Si consideri il seguente problema di punto fisso

$$x = \Phi(x) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{x^2}{2}} + 1. \tag{2}$$

1. Verificare che il problema (2) ammette un unico punto fisso $\alpha = \Phi(\alpha)$ nell'ntervallo $[1, 2]$.
2. Dimostrare che le iterazioni di punto fisso associate al problema (2) convergono per ogni scelta di $x_0 \in [1, 2]$ e trovare l'ordine di convergenza (può essere utile sapere che $\Phi''(x) \geq 0,\ \forall x \in [1, 2]$).
3. Posto $x^{(0)} = 1$, si calcolino tre iterazioni del metodo e si stimi la velocità asintotica di convergenza

Soluzione

1. Osserviamo che

   $$2 > \Phi(1) = \frac{e^{1/2}}{2} + 1 > \Phi(2) = \frac{1}{2e} + 1 > 1.$$

   e che la funzione $\Phi(x)$ è decrescente essendo la derivata di $\Phi(x)$, data da

   $$\Phi'(x) = -\frac{x}{2}e^{1-\frac{x^2}{2}}$$

   negativa $\forall x \in [1, 2]$. Segue che $\Phi([1, 2]) \subset [1, 2]$. Inoltre, essendo $\Phi''(x) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) > 0,\ \forall x \in [1, 2]$, $\Phi'(x)$ è crescente nell'intervallo $[1, 2]$ e

   $$|\Phi'(2)| = \left|-\frac{4e^{-3}}{3(1+e^{-3})^{2/3}}\right| < |\Phi'(1)| = \left|-\frac{2}{3 \cdot 2^{2/3}}\right| < 1,$$

   e quindi $|\Phi'(x)| < 1,\ \forall x \in [1, 2]$.
   Le proprietà $\Phi(x) \in C^1([1, 2])$ (in realtà ha una regolarità maggiore), $\Phi([1, 2]) \subset [1, 2]$ e $|\Phi'(x)| < 1,\ \forall x \in [1, 2]$ implicano la convergenza delle iterazioni di punto fisso associate a $\Phi(x)$, per qualunque scelta del punto iniziale $x_0 \in [1, 2]$.
   Inoltre poiché $\Phi'(x)$ è sempre diversa da zero in $[1, 2]$, lo è in particolare in $x = \alpha$ e quindi il metodo risulta di ordine $p = 1$.

2. Il metodo di punto fisso sarà:

   $$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{(x^{(k)})^2}{2}} + 1.$$

   I primi tre elementi della succesione, calcolati a partire da $x^{(0)} = 1$ saranno:

   $$x^{(1)} = 1.824360635350064$$
   $$x^{(2)} = 1.257356487467622$$
   $$x^{(3)} = 1.616547538624604$$

   e la stima della velocità di convergenza considerando $x^{(3)} \approx \alpha$, sarà $R \approx -log(\Phi'(x^{(3)}) = 0.519467426759048$.

Esercizio 3

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{3}$$

si consideri per la sua discretizzazione il seguente metodo ad un passo

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n+1} &= u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} &= u_n + hf(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1}) \end{aligned} \tag{4}$$

1. Si calcoli l'ordine del metodo (4).
2. Si determini per quali valori di h il metodo (4) risulta assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$\begin{aligned} &y'(x) = \lambda y(x), \qquad x > 0 \\ &y(0) = 1, \end{aligned} \tag{5}$$

con $\lambda \leq 0$.

Risoluzione

1. Il metodo (4) può essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, u_n) \\ K_2 &= f(t_{n+1}, u_n + hK_1) \\ u_{n+1} &= u_n + hK_2. \end{aligned} \tag{6}$$

La formulazione (6) rivela che il metodo considera o è un metodo di Runge Kutta a due stadi con

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = a_2 = 1,$$

da cui si ricava che, essendo $b_1 + b_2 = 1$ il metodo risulta consistente. Inoltre, essendo il metodo a due stadi può essere al massimo di ordine $p = 2$, ma ciò non è vero essendo $a_2 c_2 = 1 \neq \frac{1}{2}$.
Il metodo (4) risulta pertanto un metodo di RInge-Kutta a due stadi di ordine $p = 1$.

In alternativa, se non si riconosce un metodo di Runge-Kutta, si procede nel modo seguente. Si calcola l'errore di troncamento locale:

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y_{n+1} - u^*_{n+1}}{h} = \frac{y_{n+1} - [y_n + hf(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)]}{h}.$$

Sviluppando $f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)$ in un intorno di t_n e ricordando che, essendo $y(t)$ soluzione del problema di Cauchy (3), $y'(t) = f(t, y(t))$ e $y''(t) = f_t(t, y(t) + y'(t) f_y(t, y(t),$

si ha che

$$
\begin{aligned}
u^*_{n+1} &= \\
&= y_n + hf(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)) \\
&= y_n + h[f(t_n, y_n) + hf_t(t_n, u_n) + hy'(t_n)f_y(t_n, y_n) + O(h^2)] \\
&= y_n + hy'_n + h^2 y''_n + O(h^3)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Inoltre, sviluppando y_{n+1} in un intorno di t_n, si ha:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + O(h^3).$$

Si ottiene quindi:

$$\tau_{n+1}(h) = -\frac{h}{2} y''_n + O(h^2) = O(h)$$

che equivale a dire ordine $p = 1$.

2. Applicando il metodo (4) al problema modello (5), si ottiene:

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda(u_n + h\lambda u_n) = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2]u_n = [1 + h\lambda + (h\lambda)^2]^{n+1}.$$

Si ha quindi che $u_n \to 0$ quando $n \to \infty$ se e solo se

$$|1 + h\lambda + (h\lambda)^2| < 1,$$

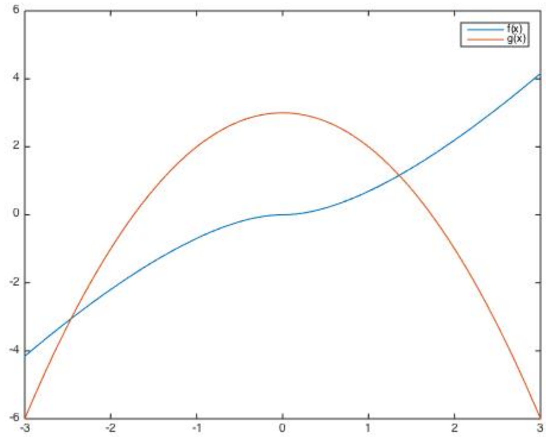
da cui per $\lambda < 0$ se e solo se

$$- \quad < 1 + h\lambda + (h\lambda)^2 < |$$

ovvero se e solo se $h|\lambda| < 1$.

Esercizio 4

Si considerino le funzioni $f(x) = x \log(|x| + 1)$ e $g(x) = 3 - x^2$. Scrivere uno script di Matlab che disegni il grafico delle due funzioni nell'intervallo $(-3, 3)$



e approsimi l'area della regione $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x) \le y \le g(x)\}$.