COGNOME NOME N. Matricola

FIRMA

Analisi Numerica I - Terzo appello a.a. 2017–2018

22 giugno 2018

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Dire se la matrice A è simmetrica e definita positiva.
2. Si calcolino la matrice diagonale D e la matrice triangolare inferiore L con $\ell_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, 3$ tali che $A = LDL^T$.
3. Si utilizzi la fattorizzazione trovata per risolvere il sistema (1).

Esercizio 2

Si consideri il seguente problema di punto fisso

$$x = \Phi(x) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{x^2}{2}} + 1. \tag{2}$$

1. Verificare che il problema (2) ammette un unico punto fisso $\alpha = \Phi(\alpha)$ nell'ntervallo $[1, 2]$.
2. Dimostrare che le iterazioni di punto fisso associate al problema (2) convergono per ogni scelta di $x_0 \in [1, 2]$ e trovare l'ordine di convergenza (può essere utile sapere che $\Phi''(x) \geq 0,\ \forall x \in [1, 2]$).
3. Posto $x^{(0)} = 1$, si calcolino tre iterazioni del metodo e si stimi la velocità asintotica di convergenza

Esercizio 3

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{3}$$

si consideri per la sua discretizzazione il seguente metodo ad un passo

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n+1} &= u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} &= u_n + hf(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1}) \end{aligned} \tag{4}$$

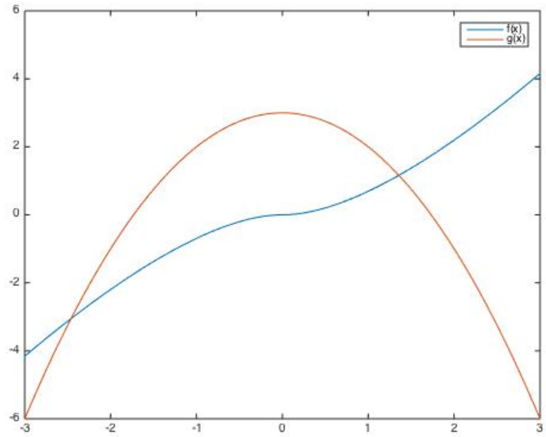
1. Si calcoli l'ordine del metodo (4).
2. Si determini per quali valori di h il metodo (4) risulta assolutamente stabile se applicato al problema modello

   $$\begin{aligned} &y'(x) = \lambda y(x), \qquad x > 0 \\ &y(0) = 1, \end{aligned} \tag{5}$$

   con $\lambda \leq 0$.

Esercizio 4

Si considerino le funzioni $f(x) = x \log(|x| + 1)$ e $g(x) = 3 - x^2$. Scrivere uno script di Matlab che disegni il grafico delle due funzioni nell'intervallo $(-3, 3)$



e approsimi l'area della regione $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x) \leq y \leq g(x)\}$.