COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - Secondo appello a.a. 2017–2018

6 febbraio 2018

Esercizio 1

Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

con il metodo iterativo

$$\text{dato } \mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}).$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e D matrice diagonale con $d_{i,i} = a_{i,i}$, per $i = 1, 2, 3$.

1. Dire per quali valori del parametro α il metodo è consistente.
2. Dire per quali valori del parametro α il metodo è convergente.
3. Calcolare il valore ottimale di α.

Risoluzione Il metodo assegnato è un metodo di Richardson stazionario con $P = D$. Dalla teoria sappiamo che

1. Consistenza sse $\alpha \neq 0$
2. Convergenza sse $\frac{2Re(\lambda_i)}{\alpha|\lambda_i|} > 1$, per $i = 1, 2, 3$ o, nel caso in cui gli autovalori di $D^{-1}A$ siano tutti positivi sse $0 < \alpha < 2/\lambda_{\text{max}}$
3. se gli autovalori di $D^{-1}A$ sono tutti positivi $\alpha_{\text{opt}} = 2/(\lambda_{\text{max}} + \lambda_{\text{min}})$.

. Nell'esercizio assegnato:

1. Il metodo è consistente sse $\boxed{\alpha \neq 0}$.
2. Calcolo λ_i, per $i = 1, 2, 3$, autovalori di $D^{-1}A$:

$$\det(D^{-1}A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - \frac{7}{12}\right] = 0$$

   Autovalori di $D^{-1}A$:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{\frac{7}{12}} > \lambda_2 = 1 > \lambda_3 = 1 - \sqrt{\frac{7}{12}} > 0$$

   sono tutti positivi e quindi il metodo converge sse $\boxed{0 < \alpha < \frac{2}{1+\sqrt{\frac{7}{12}}}}$

3. $\boxed{\alpha_{\text{opt}} = 2/(\lambda_{\text{max}} + \lambda_{\text{min}}) = 1}$

Se non ho riconosciuto Richardson (più complesso):

1. Consistenza sse i sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x})$, cioè $\boxed{\alpha \neq 0}$.

2. Convergenza sse la matrice di iterazione $B(\alpha) = I - \alpha D^{-1}A$ ha raggio spettrale $\rho(B(\alpha)) < 1$ o equivalentemente se i tre autovalori sono in modulo minori di 1. $\lambda_i(B(\alpha)) = 1 - \alpha\lambda_i$ Da cui si ha:

$$\lambda_1(B(\alpha)) = 1 - \alpha\left(1 + \sqrt{\frac{7}{12}}\right), \quad \lambda_2(B(\alpha)) = 1 - \alpha, \quad \lambda_3(B(\alpha)) = 1 - \alpha\left(1 - \sqrt{\frac{7}{12}}\right)$$

e quindi condizione di convergenza: $|\lambda_i(B(\alpha))| < 1$, per $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \left|1 - \alpha\left(1 + \sqrt{\frac{7}{12}}\right)\right| < 1 \\ |1 - \alpha| < 1 \\ \left|1 - \alpha\left(1 - \sqrt{\frac{7}{12}}\right)\right| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{2}{1+\sqrt{\frac{7}{12}}} \\ 0 < \alpha < 2 \\ 0 < \alpha < \frac{2}{1-\sqrt{\frac{7}{12}}} \end{cases} \iff \boxed{0 < \alpha < \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{7}{12}}}}$$

3. Devo calcolare quando il raggio spettrale di $B(\alpha)$ è minimo: questo succede nel punto di minimo della funzione:

$$g(\alpha) = \max_{i=1,2,3}\{|\lambda_i(B(\alpha))|\} = \max\left\{\left|1 - \alpha\left(1 + \sqrt{\frac{7}{12}}\right)\right|, |1 - \alpha|, \left|1 - \alpha\left(1 - \sqrt{\frac{7}{12}}\right)\right|\right\}$$

Il punto di minimo si troverà necessariamente nell'intervallo $\left(0, \frac{2}{1+\sqrt{\frac{7}{12}}}\right)$ e precisamente nel punto di intersezione di

$$-1 + \alpha\left(1 + \sqrt{\frac{7}{12}}\right) \qquad 1 - \alpha\left(1 - \sqrt{\frac{7}{12}}\right)$$

che è $\boxed{\alpha = 1}$.

Esercizio 2

Si vuole calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 xe^{2x} dx. \tag{1}$$

1. Fornire una maggiorazione dell'errore E_{CS} che si commette utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson considerando in totale $n = 8$ sottintervalli di lunghezza uguale dell'intervallo $[0, 1]$.

2. Volendo utilizzare il metodo dei trapezi, in quanti sottointervalli è necessario suddividere l'intervallo $[0, 1]$ per avere un errore $E_T \leq E_{CS}$ del punto precedente?

N.B. Non è richiesto il calcolo del valore approssimato dell'integrale.
Risoluzione

1. Formula dell'errore del metodo di Cavalieri-Simpson, considerando $h = \frac{b-a}{n}$:

$$E_{CS} \leq \frac{b-a}{180} \|f^{(IV)}\|_\infty h^4$$

Derivate di $f(x) = xe^{2x}$:

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}; \quad f''(x) = 4e^{2x} + 4xe^{2x}; \quad f'''(x) = 12e^{2x} + 8xe^{2x}; \quad f^{(IV)} = 32e^{2x} + 16xe^{2x}$$

Norma di $f^{(IV)}$: $\|32e^{2x} + 16xe^{2x}\|_\infty = 32e^2 + 16e^2 = 48e^2 = 354.675$

$$E_{CS} \leq \frac{1}{180} 354.675 \cdot 8^{-4} = 0.00048 = 4.8 \cdot 10^{-4}$$

.

2. Utilizzando la formula dell'errore dei Trapezi:

$$E_T \leq \frac{b-a}{12} \|f''\|_\infty h^2 < 4.8 \cdot 10^{-4}$$

si ottiene, evidenziando che $\|f''\|_\infty = f''(1) = 4e^2 + 4e^2 = 8e^2 = 59.12$,

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3 \|f''\|_\infty}{12 \cdot 4.8 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{\|f''\|_\infty}{12 \cdot 4.8 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{59.12 \cdot 10^4}{57.6}} = 101.31$$

$$\Longrightarrow \boxed{n \geq 102}.$$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0; \qquad t \in (t_0, t_0 + T], \tag{2}$$

si consideri il seguente schema numerico: dato $u_0 = y_0$,

$$u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - \frac{7}{8}u_{n-1} + \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{h}{8}[4f(t_n, u_n)] - 2f(t_{n-1}, u_{n-1}) + f(t_{n-2}, u_{n-2})] \tag{3}$$

1. Studiare la consistenza del metodo.
2. Studiare la zero-stabilità del metodo.
3. Nel problema (2) si considerino $f(t, y) = -y^2$ e dato iniziale $y(1) = 1$; la soluzione esatta risulta $y(t) = \frac{1}{t}$.
   Posto $h = 0.2$, si calcoli l'approssimazione della soluzione in $t = 1.8$. Come dati iniziali per il metodo (3), si considerino i valori della soluzione esatta. Per i calcoli si usino 5 cifre.

Risoluzione Metodo a tre passi: $p = 2$.

1. Consistenza: OK perché

$$\sum_{j=0}^{2} a_j = \frac{7}{4} - \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1 \qquad -\sum_{j=0}^{2} j a_j + \sum_{j=0}^{2} b_j = \frac{7}{8} - 2\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1$$

2. Zero-stabilità: Polinomio $\rho(r) = r^3 - \frac{7}{4}r^2 + \frac{7}{8}r - \frac{1}{8}$. Grazie alla consistenza, $r_0 = 1$ è radice e quindi:

$$\rho(r) = (r-1)\left(r^2 - \frac{3}{4}r - \frac{1}{8}\right) = (r-1)\left(r - \frac{1}{2}\right)\left(r - \frac{1}{4}\right)$$

   La condizione delle radici è soddisfatta. Di conseguenza il $\boxed{\text{metodo è zero-stabile}}$.

3. Si deve calcolare u_4, noti $u_0 = 1$, $u_1 = 1/1.2 = .83333$, $u_2 = 1/1.4 = .71429$. Si devono quindi eseguire due passi del metodo.

n	t_n	u_n	u_{n-1}	u_{n-2}	$f(t_n, u_n)$	$f(t_{n-1}, u_{n-1})$	$f(t_{n-2}, u_{n-2})$	t_{n+1}	u_{n+1}
3	1.4	.71429	.83333	1	-.51021	-.69444	-1	1.6	.60454
4	1.6	.49683	.71429	.83333	-.36546	-.51021	-.69444	1.8	$\boxed{.50871}$

Esercizio 4

i) Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo della sostituzione in avanti per la risoluzione di un sistema lineare con matrice triangolare inferiore.

ii) Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo iterativo per l'approsimazione della soluzione di un sitema lineare della forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: se P è la parte triangolare inferiore di A e α è un numero reale nell'intervallo $(0, 2)$,

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ \text{Per } k \geq 0 \\ \quad \mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)} \\ \quad P\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \\ \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{d}^{(k)} \end{array}$$

La funzione deve ricevere in ingresso la matrice A, il vettore $\mathbf{b}$, il parametro α e il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$.

Il metodo iterativo si deve fermare se il residuo relativo $\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ è minore di 10^{-8} oppure se si superano le 1000 iterazioni.

Questa funzione deve usare il metodo della sostituzione in avanti per la risoluzione del sistema lineare $P\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$.