COGNOME NOME N. Matricola

FIRMA

Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2017–2018

10 gennaio 2018

Esercizio 1

Siano dati la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se la matrice A assegnata ammette una fattorizzazione di tipo LU.
2. Risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo di Thomas.

Risoluzione

1. I minori principali sono tutti non nulli in quanto: $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, $A_3 = 5$. Inoltre $\det(A) = 7$. La matrice ammette fattorizzazione LU unica, con $\det(U) \neq 0$.
2. Risulta:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Si vuole risolvere l'equazione

$$f(x) = \sqrt{x+3} - e^{-x} = 0. \tag{1}$$

1. Dimostrare che la funzione $f(x)$ ammette una sola radice α e che $\alpha \in [-2, 0]$.
2. Dire se il problema (1) è equivalente al problema di punto fisso
$$x = -\frac{1}{2}\log(x+3). \tag{2}$$
3. Dire per quali scelte del punto iniziale $x^{(0)} \in [-2, 0]$ il metodo iterativo
$$x^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\log(x^{(k)}+3) \tag{3}$$
associato al problema (2) converge e con quale ordine.
4. Posto $x^{(0)} = -1$, si eseguano le prime 5 iterazioni del metodo (3) utilizzando 5 cifre per il calcolo e si stimi il fattore asintotico di convergenza.

Risoluzione

1. La funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, 2]$ è continua e crescente perché somma di funzioni crescenti ($\sqrt{x+3}$ e $-e^{-x}$). Inoltre $f(-2) = 1 - e^2 < 0$ e $f(0) = \sqrt{3} - 1 > 0$. Quindi esiste $\alpha \in [-2, 0]$ ed è l'unica radice di $f(x)$.
2. Applicando il teorema del punto fisso si ha che la funzione $\Phi(x) = -\frac{1}{2}\log(x+3)$ ammette uno e un solo punto fissao perché èontinua, derivabile e decrescente in $[-2, 0]$ e $\Phi(-2) = 0 > \Phi(0) = -\frac{1}{2}\log(3) < -2$. Inoltre se α è radice di $f(x)$ è anche punto fisso di $\Phi(x)$ e viceversa. quindi i due problemi sono equivalenti.
3. Essendo la derivata di $\Phi(x)$, $\Phi'(x) = -\frac{1}{2(x+3)}$, si ha che $-1 < \Phi'(x) < 0$ in $[-2, 0]$ e quindi il metodo iterativo converge $\forall x^{(0)} \in [-2, 0]$ con ordine $p = 1$.
4.
$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= -1 \\
x^{(1)} &= -0.5\log(x^{(0)}+3) = -0.5\log(-1+3) = -0.34657 \\
x^{(2)} &= -0.5\log(x^{(1)}+3) = -0.5\log(-0.34657+3) = -0.48793 \\
x^{(3)} &= -0.5\log(x^{(2)}+3) = -0.5\log(-0.48793+3) = -0.46055 \\
x^{(4)} &= -0.5\log(x^{(3)}+3) = -0.5\log(-0.46055+3) = -0.46597 \\
x^{(5)} &= -0.5\log(x^{(4)}+3) = -0.5\log(-0.46597+3) = -0.46491
\end{aligned} \tag{4}$$

Fattore asintotico di convergenza: $|\Phi'(x^{(5)})| = \left| -\frac{1}{2(-0.46491+3)} \right| = 0.19723$

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0; \qquad t \in (t_0, t_0 + T],$$

si consideri il seguente schema numerico: dato $u_0 = y_0$,

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t_n, u_n) \\ K_2 &= hf(t_n + \frac{2}{3}h, u_n + \frac{2}{3}K_1) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{4}(K_1 + 3K_2), \qquad k = 0, \dots, N_h - 1 \end{aligned} \tag{5}$$

1. Si verifichi che si tratta di un metodo di Runge-Kutta consistente.
2. Trovare l'ordine del metodo.
3. Trovare la condizione sul passo h affinché il metodo (5) risulti assolutamente stabile nel caso particolare in cui nel problema modello il parametro $\lambda \in \mathbb{R}^-$.

Risoluzione

1. Lo schema (5) è un metodo di Runge-Kutta esplicito a due stadi in quanto in K_1 il parametro $c_1 = 0$ e di e in K_2 i parametri $0 \leq c_2 = a_{2,1} \leq 1$. Inoltre è un metodo consistente perché $b_1 + b_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.
2. Essendo il metodo a 2 stadi può essere al più di ordine $p = s = 2$. Essendo $b_2 c_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ il metodo è proprio di ordine $p = 2$.
3. Essendo il metodo a due stati di ordine 2, la condizione di assoluta stabilità è data da

   $$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right| < 1,$$

   nel caso particolare di $\lambda \in \mathbb{R}^-$ è soddisfatta sse

   $$-1 < 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} < 1.$$

   La disequazione di sinistra risulta sempre verificata mentre quella di destra è verificata sse

   $$h < \frac{2}{|\lambda|}.$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi la forma composita della formula di Gauss a tre punti

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{3/5})$$

per l'approssimazione di

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

La funzione deve ricevere in ingresso la funzione integranda f, gli estremi dell'intervallo d'integrazione a e b e il numero di sotto-intervalli da considerare nella forma composita. Deve restituire il valore approssimato dell'integrale.

Suggerimento Nel passaggio dall'integrale da $[-1,1]$ ad un generico intervallo $[c,d]$, si consideri il cambio di variabile: $x = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}t$.