COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

FIRMA ______

Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2017–2018

10 gennaio 2018

Esercizio 1

Siano dati la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se la matrice A assegnata ammette una fattorizzazione di tipo LU.
2. Risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo ritenuto più opportuno.

Esercizio 2

Si vuole risolvere l'equazione

$$f(x) = \sqrt{x+3} - e^{-x} = 0. \tag{1}$$

1. Dimostrare che la funzione $f(x)$ ammette una sola radice α e che $\alpha \in [-2, 0]$.
2. Dire se il problema (1) è equivalente al problema di punto fisso

$$x = -\frac{1}{2}\log(x+3). \tag{2}$$

3. Dire per quali scelte del punto iniziale $x^{(0)} \in [-2, 0]$ il metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\log(x^{(k)}+3) \tag{3}$$

associato al problema (2) converge e con quale ordine.

4. Posto $x^{(0)} = -1$, si eseguano le prime 5 iterazioni del metodo (3) utilizzando 5 cifre per il calcolo e si stimi il fattore asintotico di convergenza.

Esercizio 3

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0; \qquad t \in (t_0, t_0 + T],$$

si consideri il seguente schema numerico: dato $u_0 = y_0$,

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t_n, u_n) \\ K_2 &= hf(t_n + \frac{2}{3}h, u_n + \frac{2}{3}K_1) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{4}(K_1 + 3K_2), \qquad k = 0, \ldots, N_h - 1 \end{aligned} \tag{4}$$

1. Si verifichi che si tratta di un metodo di Runge-Kutta consistente.
2. Trovare l'ordine del metodo.
3. Trovare la condizione sul passo h affinché il metodo (4) risulti assolutamente stabile nel caso particolare in cui nel problema modello il parametro $\lambda \in \mathbb{R}^-$.

Esercizio 4

Scrivere due funzione di Matlab che approssimino

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

usando la forma **composita** della formula di Gauss a due punti

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right]+\frac{(b-a)^5}{20\cdot 6^3}f^{(iv)}(\xi)\,.$$

i) La prima funzione deve ricevere in ingresso la funzione integranda f, gli estremi dell'intervallo d'integrazione a e b e il numero di sottointervalli da considerare nella forma composita. Deve restituire il valore approssimato dell'integrale.

ii) La seconda funzione deve ricevere in ingresso la funzione integranda f, gli estremi dell'intervallo d'integrazione a e b e una tolleranza `toll`. Deve restituire l'integrale approssimato con errore stimato minore di toll e il numero di sottointervalli usati. (Questa seconda funzione può usare la prima e non deve usare più di 2^{10} sottointervalli).