Analisi Numerica I - Quarto appello a.a. 2016–2017 - Correzione

4 settembre 2017

Esercizio 1

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se è possibile calcolare $A = LU$, con il metodo di Doolittle (senza utilizzare la strategia di pivoting).

2. Calcolare l'inversa di A utilizzando la fattorizzazione di Doolittle. Si eseguano i calcoli in aritmetica esatta.

Risoluzione

1. Essendo i tre minori principali di A non null ($A_1 = 3$, $A_2 = 8$, $A_3 = \det(A) = 18$), è possibile fattorizzare la matrice senza ricorrere alla strategia di pivoting.

2. Con il metodo di Doolittle si ottiene:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3/8 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene A^{-1} osservando che: $A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$. Di conseguenza:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/8 & -3/8 & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & -2/9 \\ 0 & 3/8 & 1/9 \\ 0 & 0 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 5/18 & -1/6 & -2/9 \\ 1/9 & 1/3 & 1/9 \\ -1/18 & -1/6 & 4/9 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Siano date le funzioni $f_1(x) = \sin(x)$ e $f_2(x) = 2x - 1$.

i) Dimostrare che i loro grafici si intersecano in un unico punto di ascissa α e che $\alpha \in [0, 1]$.

ii) Considerare il seguente metodo di punto fisso:

$$x^{(k+1)} = 1 - x^{(k)} + \sin(x^{(k)}).$$

Dire per quali valori di $x^{(0)} \in [0, 1]$ il metodo converge e calcolare l'ordine del metodo.

iii) Calcolare un'approssimazione di α con 5 iterazioni del metodo, considerando come valore iniziale $x^{(0)} = 1$. Stimare il fattore asintotico di convergenza. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre.

Risoluzione

i) Essendo $-1 \le \sin(x) \le 1$ eventuali punti di intersezioni si hanno dove $-1 \le 2x - 1 \le 1$ e quindi per $0 \le x \le 1$. Si consideri ora la funzione $d(x) = f_1(x) - f_2(x) = \sin(x) - 2x + 1$, continua, derivabile con $d'(x) = \cos(x) - 2 < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ da cui si ha che $d(x)$ è decrescente. Inoltre $d(0) = 1 > 0$ e $d(1) = \sin(1) - 2 + 1 < 0$ e quindi

$$\exists! \alpha \in [0, 1] \text{ intersezione di } f_1(x) \text{ e } f_2(x).$$

ii) La funzione $\Phi(x) = 1 - x + sin(x)$ gode della seguenti proprietà:

1. $\Phi \in C^1([0, 1])$
2. $\Phi : [0, 1] \to [0, 1]$
3. $|\Phi'(x)| = |-1 + cos(x)| \le 1 - cos(1) < 1 \quad \forall x \in [0, 1]$.

Quindi il metodo di punto fisso converge $\forall x^{(0)} \in [0, 1]$.

iii) $x^{(1)} = \Phi(x^{(0)}) = 1 - x^{(0)} + \sin(x^{(0)}) = 0.84147$
$x^{(2)} = \Phi(x^{(1)}) = 1 - x^{(1)} + \sin(x^{(1)}) = 0.90415$
$x^{(3)} = \Phi(x^{(2)}) = 1 - x^{(2)} + \sin(x^{(2)}) = 0.88175$
$x^{(4)} = \Phi(x^{(3)}) = 1 - x^{(3)} + \sin(x^{(3)}) = 0.89011$
$x^{(5)} = \Phi(x^{(4)}) = 1 - x^{(4)} + \sin(x^{(4)}) = 0.88703 \approx \alpha$

Fattore asintotico di convergenza: $\left| \frac{x^{(5)} - x^{(4)}}{x^{(4)} - x^{(3)}} \right| = 0.36802$

Esercizio 3

Si consideri il metodo di Adams-Bashfort a due passi,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}). \tag{1}$$

1. Si dimostri che il metodo è consistente.
2. Dato il problema modello

$$y' = -2y \quad t > 0 \qquad y(0) = 1, \tag{2}$$

   si determinino i valori di h per cui il metodo risulta assolutamente stabile.

Risoluzione

1. Essendo il metodo proposto un metodo multistep lineare, con $p = 1$, per verificare la consisitenza è sufficiente verificare che:

$$1 = \sum_{j=0}^{1} a_j = 1 + 0 = 1 \text{ e che } 1 = -\sum_{j=0}^{1} j a_j + \sum_{j=0}^{1} b_j = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 : \text{ OK!}$$

2. Applicando il metodo al problema modello si ha:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(-6u_n + 2u_{n-1}) = (1 - 3h)u_n + hu_{n-1}$$

   Per studiare l'assoluta stabilità si impone che siano in modulo minori di 1 le radici del polinomio caratteristico

$$\Pi(r) = r^2 - (1 - 3h)r - h.$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 - 3h \pm \sqrt{(1 - 3h)^2 + 4h}\right).$$

   Per valori di h positivi, il discriminante è sempre positivo e quindi le radici sono reali e la condizione diventa:

$$-1 < \frac{1}{2}\left(1 - 3h - \sqrt{(1 - 3h)^2 + 4h}\right) < \frac{1}{2}\left(1 - 3h + \sqrt{(1 - 3h)^2 + 4h}\right) < 1.$$

   Dalla prima disequazione risulta:

$$\sqrt{(1 - 3h)^2 + 4h} < 3 - 3h \Leftrightarrow h < \frac{1}{2}.$$

   Dalla seconda disequazione risulta:

$$\sqrt{(1 - 3h)^2 + 4h} < 1 + 3h \Leftrightarrow \forall h > 0.$$

   La condizione di assoluta stabilità risulta quindi essere: $h < \frac{1}{2}$.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo iterativo di Richardson per l'approsimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato.} \\
&\text{Per } k \geq 0 \\
&\quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)})
\end{aligned}
$$

essendo D la matrice diagonale con la stessa diagonale della matrice A.
Il metodo iterativo si deve fermare quando il residuo è minore di 10^{-8} oppure il numero d'iterazioni fatte è superiore a 500.
La funzione deve ricevere in ingresso la matrice A, il vettore $\mathbf{b}$, l'approssimazione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ e il parametro di rilassamento θ, e restituire la soluzione approssimata e il numero d'iterazioni fatte.