COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - Quinto appello a.a. 2016–2017

4 settembre 2017

Esercizio 1

Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se è possibile calcolare $A = LU$, con il metodo di Doolittle (senza utilizzare la strategia di pivoting).
2. Calcolare l'inversa di A utilizzando la fattorizzazione di Doolittle. Si eseguano i calcoli in aritmetica esatta.

Esercizio 2

Siano date le funzioni $f_1(x) = \sin(x)$ e $f_2(x) = 2x - 1$.

i) Dimostrare che i loro grafici si intersecano in un unico punto di ascissa α e che $\alpha \in [0, 1]$.

ii) Considerare il seguente metodo di punto fisso:

$$x^{(k+1)} = 1 - x^{(k)} + \sin(x^{(k)}).$$

Dire per quali valori di $x^{(0)} \in [0, 1]$ il metodo converge e calcolare l'ordine del metodo.

iii) Calcolare un'approssimazione di α con 5 iterazioni del metodo, considerando come valore iniziale $x^{(0)} = 1$. Stimare il fattore asintotico di convergenza. Per i calcoli si utilizzino 5 cifre.

Esercizio 3

Si consideri il metodo di Adams-Bashfort a due passi,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}). \tag{1}$$

1. Si dimostri che il metodo è consistente.
2. Dato il problema modello

   $$y' = -2y \quad t > 0 \qquad\qquad y(0) = 1, \tag{2}$$

   si determinino i valori di h per cui il metodo risulta assolutamente stabile.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo iterativo di Richardson per l'approsimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato.}\\
&\text{Per } k \geq 0\\
&\quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)})
\end{aligned}$$

essendo D la matrice diagonale con la stessa diagonale della matrice A.
Il metodo iterativo si deve fermare quando il residuo è minore di 10^{-8} oppure il numero d'iterazioni fatte è superiore a 500.
La funzione deve ricevere in ingresso la matrice A, il vettore $\mathbf{b}$, l'approssimazione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ e il parametro di rilassamento θ, e restituire la soluzione approssimata e il numero d'iterazioni fatte.