Analisi Numerica I - Quarto appello a.a. 2016–2017

10 luglio 2017

CORREZIONE

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Dire quali tra i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel converge.
2. Scrivere le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel.
3. Eseguire due iterazioni del metodo di Jacobi eseguendo i calcoli in aritmetica esatta, scegliendo $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ come vettore iniziale.

Risoluzione

1. Tre modi:
   (a) La matrice è a dominanza diagonale stretta per righe. Di conseguenza entrambi i metodi convergono.
   (b) La matrice è tridiagonale e definita positiva ($A_1 = 2$,$A_2 = \frac{15}{4}$, $A_3 = \det(A) = \frac{11}{2}$). Di conseguenza entrambi i metodi convergono.
   (c) La matrice è tridiagonale, la matrice di iterazione di Jacobi e il suo polinomio carattresitico sono:
   $$B_J = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(\lambda I - B_J) = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{5}{16}\right),$$
   per cui il raggio spettrale di B_J è $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}}{4} < 1$ e il raggio spettrale di B_{GS} è $\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J) = \frac{5}{16}$. Di conseguenza entrambi i metodi convergono.
2. Le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono:
   $$B_J = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
   $$B_{GS} = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{32} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
3. Iterazioni:
   $$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(1)} = D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(2)} = B_J\mathbf{x}^{(1)} + D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{17}{8} \\ \frac{11}{8} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Si vuole approssimare con il metodo di Cavalieri-Simpson il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^2 e^{\frac{x}{2}-1} dx.$$

1. Si determini il numero minimo di intervalli in cui suddividere l'intervallo di integrazione per ottenere un errore minore di 10^-4.
2. Si calcoli l'integrale con i dati del punto precedente e l'errore effettivamente commesso, utilizzando 6 cifre per il calcolo.

Risoluzione

1. Ricordando che la formula dell'errore di Cavalieri Simpson è data da:

$$|E_{CS}| \leq \frac{b-a}{180} \|f^{IV}\| \left(\frac{H}{2}\right)^4,$$

osservando che $b-a=2$, che $f^{IV}(x) = \frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}-1}$ da cui si ha che $\|f^{IV}\| = 1/16$ e che $H = (b-a)/M = 2/M$, si ottiene:

$$M > \left(\frac{2}{180} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} \cdot 16 \cdot 10000\right)^{1/4} = \frac{10}{2}\left(\frac{1}{90}\right)^{1/4} \approx 1.62$$

Il numero minimo di intervalli risulta $M = 2$.

2. $M = 2$, $H = 1i$, ovvero $n = 4$, $h = \frac{1}{2}$. I nodi sono $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{3}{2},\ x_4 = 2$

$$\begin{aligned} I_{CS}(f) &= \frac{h}{3}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left(e^{-1} + 4e^{-3/4} + 2e^{-1/2} + 4e^{-1/4} + e^0\right) \\ &= \frac{1}{6}(0.367879 + 1.88947 + 1.21306 + 3.11520 + 1) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 7.58561 = 1.26427 \end{aligned} \tag{1}$$

$$I(f) = \int_0^2 e^{\frac{x}{2}-1} dx = 2e^{\frac{x}{2}-1}\,|_0^2 = 2\left(1 - e^{-1}\right) = 1.26424$$

$$E_{CS}(f) = |I(f) - I_{CS}(f)| = |1.2624 - 1.2627| = 0.3 \cdot 10^{-4} < 10^{-4}.$$

Esercizio 3

Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \,, \end{cases} \quad ,$$

si consideri il seguente metodo multistep

$$u_{n+1} = 2u_{n-1} - u_{n-3} + 2h[f(t_n, u_n) - f(t_{n-2}, u_{n-2})],$$

1. Dire quanti sono i passi del metodo e se è implicito o esplicito, motivando le risposte.
2. Trovare l'ordine di consistenza.
3. Dire se è convergente.

Risoluzione

1. I passi del metodo sono q=4 in quanto u_{n+1} dipende da $un - 3$. È esplicito perché u_{n+1} non compare come argomento della funzione f
2. Per trovare l'ordine di consistenza si possono usare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{3} \alpha_j = 2 - 1 = 1 \quad -\sum_{j=0}^{3} j\alpha_j + \sum_{j=0}^{3} \beta = -2 + 3 + 2 - 2 = 1 \qquad \text{Metodo consistente, ordine q=1} \\
&\sum_{j=0}^{3} j^2\alpha_j - 2\sum_{j=0}^{3} j\beta = 2 - 9 + 8 = 1 \qquad \text{almeno ordine q=2} \\
&-\sum_{j=0}^{3} j^3\alpha_j + 3\sum_{j=0}^{3} j^2\beta = -2 + 27 - 24 = 1 \qquad \text{almeno ordine q=3} \\
&\sum_{j=0}^{3} j^4\alpha_j - 4\sum_{j=0}^{3} j^3\beta = 2 - 81 + 64 = -15 \neq 1 \qquad \text{ordine q=3}
\end{aligned} \tag{2}$$

3. Metodo consistente è convergente sse 0-stabile sse vale la condizione delle radici, a patto che tenda a zero l'errore sui dati iniziali.
   Il polinomio
   $$\rho(r) = r^{n+1} - \sum_{j=0}^{3} a_j r^{n-j} = r^4 - 2r^2 + 1 = (r^2 - 1)$$
   ammette due radici doppie $r_{1,2} = -1$ e $r_{3,4} = 1$, entrambe di modulo 1. Di conseguenza la condizione delle radici non è soddisfatta (le radici di modulo uguale a 1 devono essere semplici) e quindi il metodo non è né 0-stabile né convergente.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo predictor-corrector per l'approssimazione di un problema di Cauchy della forma

$$\begin{aligned} &y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_0 + T) \\ &y(t_0) = y_0 \end{aligned}$$

che usa il metodo di Eulero esplicito come metodo predictor e il metodo di Adams-Moulton a due passi come metodo corrector. Per inizializzare la procedura usare il metodo di Eulero esplicito.