COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - Terzo appello a.a. 2016–2017

12 giugno 2017

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}.$$

1. Dire per quali valori di α e β è possibile applicare il metodo di Thomas.
2. Fissati $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, e $\mathbf{b} = (0\ 0\ 1)^T$, risolvere il sistema con il metodo di fattorizzazione LU.

Risoluzione

1. È possibile applicare il metodo di Thomas sse tutti i minori principali sono non nulli ovvero:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \neq 0 \\ A_2 &= 1 - \alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\beta \neq 1 \\ A_3 &= -1 - 3\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\beta \neq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

   Thomas si applica per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha\beta \neq -\frac{1}{3}$ e $\alpha\beta \neq 1$.

2. Fissati $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, e $\mathbf{b} = (0\ 0\ 1)^T$ è possibile applicare Thomas. Si ha:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U\mathbf{x} = \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad x \in [a,b] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

1. Dire per quali valori iniziali $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ il metodo di Newton converge alla radice α.
2. Scelto $x_0 = \frac{1}{2}$, calcolare quattro iterazioni del metodo, utilizzando 4 cifre significative per il calcolo.

Risoluzione

1. Il metodo di Newton è un metodo di punto fisso in cui $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
   In questo caso si ha: $\Phi(x) = x - (1+x)\ln(1+x) \in C^1\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$. $\Phi'(x) = -\ln(1+x)$. Essendo $\Phi'(x) > 0$ per $x < 0$ e $\Phi'(x) < 0$ per $x > 0$, si ha che $\Phi(x)$ è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$ e quindi assume il suo valore massimo in $x = 0$ e il suo valore minimo o in $x = -1/2$ o in $x = 1/2$.

   $$\Phi(-1/2) \approx -0.15, \qquad \Phi(0) = 0, \qquad \Phi(1/2) \approx -0.12$$

   e quindi si ha che

   $$\Phi : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

   Son quindi soddisfatte tutte e ipotesi del teorema di convergenza globale di punto fisso e quindi Newton converge $\forall x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

2. Scelto $x_0 = \frac{1}{2}$, si ha:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.1082 \\ x_2 &= -0.6077 \cdot 10^{-2} \\ x_3 &= -0.1850 \cdot 10^{-4} \\ x_4 &= -0.1711 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

Esercizio 3

1. Trovare per quali valori del parametro α il seguente metodo di Runge-Kutta

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_n, u_n) \\ K_2 = hf(t_n + \alpha h, u_n + \alpha K_1) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5}(2K_1 + 3K_2) \end{cases} \tag{1}$$

è di ordine $p = 2$ e si trovino le condizioni di assoluta stabilità..

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty^2 \quad t > -1/2 \\ y(-1/2) = 4/3, \end{cases} \tag{2}$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{1}{t^2-1}$. Utilizzando il metodo (1) con $h = 0.25$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta e l'errore commesso in $t = 0$ utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Risoluzione

1. ordine del metodo:
Dalla teoria: un metodo di Runge-Kutta è di ordine 2 se
- $b_1 + b_2 = 1$ e questo è sempre vero essendo $b_1 = 2/5$ e $b_2 = 3/5$.
- $b_2 c_2 = 1/2$. Verso sse $\frac{3}{5}\alpha = \frac{1}{2}$ sse $\alpha = 5/6$.

Assoluta stabilità:
Dalla teoria: per un metodo a due stadi di ordine $p = 2$, la condizione di assoluta stabilità è data da:

$$\left| \frac{(h\lambda)^2}{2} + h\lambda + 1 \right| < 1$$

Disequazione non facilmente risolvibile se $\lambda \in \mathbb{C}$, ma che se $\lambda \in \mathbb{R}_-$ diventa $h|\lambda| < 2$.

2. il metodo (1) applicato al problema (2) diventa:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{4}{3} \\ K_1 = ht_n u_n^2 \\ K_2 = h(t_n + \frac{5}{6}h)(u_n + \frac{5}{6}K_1)^2 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5}(2K_1 + 3K_2) \end{cases} \tag{3}$$

Per calcolare l'approx della soluzione esatta in $t = 0$ sono necessari due passi del metodo:

n	t_n	u_n	K_1	$t_n + \frac{5}{6}h$	$u_n + \frac{5}{6}K_1$	K_2	t_{n+1}	u_{n+1}
0	-0.5	1.3333	-0.22222	-0.29167	1.1481	-0.096115	0.25	1.1867
1	-0.25	1.1867	-0.088016	-0.041667	1.1134	-0.012912	**0**	**1.1437**

e quindi $y(0) \approx u_2 = 1.1437$.
L'errore commesso è: $|y(0) - u_2| = |1.0000 - 1.1437| = 0.11437$.

Esercizio 4

Scrivere uno script di Matlab che

i) disegni i grafici delle funzioni $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = 2 - x^2$ nell'intervallo $[-2, 2]$;

ii) approssimi (usando un comando di Matlab) i punti $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$ (con $P_1 < Q_1$) d'intersezione dei due grafici;

iii) approssimi (usando un comando di Matlab) $\int_{P_1}^{Q_1} (g - f)(x)\, dx$;

iv) calcoli il polinomio $\Pi(x)$ che interpola la funzione $g-f$ in 5 punti equispaziati dell'intervallo $[P_1, Q_1]$ (estremi compresi);

v) calcoli $\int_{P_1}^{Q_1} \Pi(x)\, dx$.