COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

FIRMA | |

Analisi Numerica I - Terzo appello a.a. 2016–2017

12 giugno 2017

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}.$$

1. Dire per quali valori di α e β è possibile applicare il metodo di Thomas.
2. Fissati $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, e $\mathbf{b} = (0\ 0\ 1)^T$, risolvere il sistema con il metodo di fattorizzazione LU.

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad x \in [a,b] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

1. Dire per quali valori iniziali $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ il metodo di Newton converge alla radice α.
2. Scelto $x_0 = \frac{1}{2}$, calcolare quattro iterazioni del metodo, utilizzando 4 cifre significative per il calcolo.

Esercizio 3

1. Trovare per quali valori del parametro α il seguente metodo di Runge-Kutta

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_n, u_n) \\ K_2 = hf(t_n + \alpha h, u_n + \alpha K_1) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5}(2K_1 + 3K_2) \end{cases} \tag{1}$$

   è di ordine $p = 2$ e si trovino le condizioni di assoluta stabilità.

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty^2 \quad t > -1/2 \\ y(-1/2) = 4/3, \end{cases} \tag{2}$$

   che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{1}{t^2-1}$. Utilizzando il metodo (1) con $h = 0.25$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta e l'errore commesso in $t = 0$ utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Esercizio 4

Scrivere uno script di Matlab che

i) disegni i grafici delle funzioni $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = 2 - x^2$ nell'intervallo $[-2, 2]$;

ii) approssimi (usando un comando di Matlab) i punti $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$ (con $P_1 < Q_1$) d'intersezione dei due grafici;

iii) approssimi (usando un comando di Matlab) $\int_{P_1}^{Q_1} (g - f)(x)\, dx$;

iv) calcoli il polinomio $\Pi(x)$ che interpola la funzione $g-f$ in 5 punti equispaziati dell'intervallo $[P_1, Q_1]$ (estremi compresi);

v) calcoli $\int_{P_1}^{Q_1} \Pi(x)\, dx$.