Analisi Numerica I - Secondo appello a.a. 2016–2017 - Correzione

10 febbraio 2017

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1. Dire per quali valori di α e β il metodo del gradiente coniugato converge.
2. Fissato $\alpha = 0$, dire per quali valori di β i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.
3. Si risolva con il metodo di Thomas il sistema ottenuto ponendo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

Risoluzione

1. Dovendo essere la matrice simmetrica, deve necessariamente essere $\alpha = 2$.
   Inoltre dovendo essere la matrice definita positiva, tutti i minori principali devono essere positivi. Quindi si ha

$$\begin{cases} A_1 = 3 > 0 \\ A_2 = 3\beta - 4 > 0 \\ A_3 = 3(3\beta - 5) > 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta > \frac{5}{3}$$

2. Essendo la matrice tridiagonale, i due metodi convergono per gli stessi valori di β. Considero il metodo di Jacobi e calcolo autovalori di

$$B_J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\beta \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix},$$

.

$$\det(B_J - \lambda I) \quad = \quad -\lambda^3 - \frac{\lambda}{3\beta} = -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{3\beta}\right) = 0$$

   da cui si ottiene che

$$\rho(B_J) < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\beta| > \frac{1}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta < -\frac{1}{3},\ \beta > \frac{1}{3}.$$

3. Il sistema da risolvere risulta

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   il metodo di Thomas fornisce la seguente fattorizzazione di A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$$

   Soluzioni sistemi triangolari

$$Ly = b \quad \longrightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14/3 \\ 15/2 \end{pmatrix} \qquad Ux = y \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 1 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Si vuole approssimare con il metodo di Cavalieri-Simpson il seguente integrale:

$$I(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

1. Si determini il numero minimo di intervalli in cui suddividere l'intervallo di integrazione per ottenere un errore di integrazione minore di 10^-2.
2. Si calcoli l'integrale con i dati del punto precedente e l'errore effettivamente commesso, utilizzando 6 cifre per il calcolo.

Risoluzione

1. Ricordando che la formula dell'errore di Cavalieri Simpson è data da:

$$|E_{CS}| \leq \frac{b-a}{180}\|f^{IV}\|\left(\frac{H}{2}\right)^4,$$

che $b-a = 2\pi$, che $\|f^{IV}\| = 1/16$ e che $H = (b-a)/M = 2\pi/M$, si ottiene:

$$M > \left(\frac{2\pi}{180}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16}\cdot(2\pi)^4\cdot 100\right)^{1/4} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{10}{9}\pi\right)^{1/4} \approx 2.15$$

Il numero minimo di intervalli risulta $M = 3$.

2. $M = 3$, $H = \frac{2}{3}\pi$, ovvero $n = 6$, $h = \frac{\pi}{3}$. I nodi sono $x_0 = -\pi,\ x_1 = -\pi/3,\ x_2 = \pi/3,\ x_3 = \pi$

$$\begin{aligned}
I_{CS}(f) &= \frac{h}{3}\left\{f(-\pi) + 4\left[f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + 2\left[f\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] + f(\pi)\right\} \\
&= \frac{\pi}{9}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] + \right. \\
&\quad \left. 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\
&= .349066[4(.5+1+.5) + 2(.866025 + .866025)] = 4.00173 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$E_{CS}(f) = |I(f) - I_{CS}(f)| = |4 - 4,00173| = .173\cdot 10^{-3} < 10^{-2}.$$

Esercizio 3

Si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = (\alpha^2 - 2\beta^2)u_n + \beta u_{n+1} + h\left[(\alpha+1)f(t_n, u_n) + \beta f(t_{n+1}, u_{n+1})\right], \tag{2}$$

con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0\,, \end{cases}$$

1. Trovare per quali valori di α e β il metodo risulta consistente e l'ordine di consistenza.
2. Per il metodo ottenuto per il valore di $\alpha > 0$, si studino le condizioni di assoluta stabilità.

Risoluzione Innanzitutto, si osservi che il metodo può essere riscritto nel modo seguente

$$u_{n+1} = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{1-\beta}u_n + \frac{h}{1-\beta}\left[(\alpha+1)f(t_n, u_n) + \beta f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$$

per $\beta \neq 1$ e risulta quindi essere un metodo ad un passo implicito.

1. Per lo studio della consistenza sono possibili due strade: calcolare l'errore di troncamento oppure considerare il metodo come un metodo multistep con $p = 0$.

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(h) &= \frac{y_{n+1} - u^*_{n+1}}{h} = \frac{1}{h}\Bigg\{ y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + O(h^3) - \\ &\quad \left[\frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{1-\beta}y_n + \frac{h}{1-\beta}((\alpha+1)y'_n + \beta(y'_n + hy''_n + O(h^2))\right]\Bigg\} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\left(1 - \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{1-\beta}\right)y_n + h\left(1 - \frac{(\alpha+1)+\beta}{1-\beta}\right)y'_n + h^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{1-\beta}\right)y''_n + O(h^3)\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

Per avere consistenza si devono annullare in (3) i coefficienti di y_n e y'_n i.e.

$$\frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{1-\beta} = 1 \qquad \frac{(\alpha+1)+\beta}{1-\beta} = 1$$

Dalla seconda relazione si ricava $\alpha = -2\beta$ e sostituendo nella prima si ha $2\beta^2 + \beta - 1 = 0$ da cui si ricava

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \beta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \beta_2 = -1 \end{cases}$$

caso 1) Il metodo diventa:

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

che è il metodo di Eulero all'indietro, con ordine di consistenza $p = 1$.

caso 2) Il metodo risulta:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[3f(t_n, u_n) - f(t_{n+1}, u_{n+1})]. \tag{4}$$

anche in questo caso l'ordine di consistenza è $p = 1$ in quanto nell'espressione di $\tau_{n+1}(h)$ il coefficiente di y''_n non si annulla.

2. Assoluta stabilità. Per il metodo (4) si ha:

$$u_{n+1} = \frac{2+3h\lambda}{2+h\lambda}u_n$$

per cui si ha assoluta stabilità sse

$$\left|\frac{2+3h\lambda}{2+h\lambda}\right| < 1 \Longleftrightarrow |2+3h\lambda| < |2+h\lambda|$$

- $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(2+3hRe(\lambda))^2 + 9h^2Im(\lambda)^2 < (2+hRe(\lambda))^2 + h^2Im(\lambda)^2$$

$$8h^2|\lambda|^2 + 8hRe(\lambda) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h < \frac{-Re(\lambda)}{|\lambda|^2}$$

- $\lambda \in \mathbb{R}^-$:

$$\begin{cases} -2-h\lambda < 2+3h\lambda < 2+h\lambda \\ 2+h\lambda > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+h\lambda < 2+3h\lambda < -2-h\lambda \\ 2+h\lambda < 0 \end{cases}$$

che equivale a:

$$\begin{cases} h\lambda > -1 \\ h\lambda < 0 \\ h\lambda > -2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad h < \frac{1}{|\lambda|}$$

$$\begin{cases} h\lambda > 0 \\ h\lambda < -1 \\ h\lambda < -2 \end{cases} \qquad \text{nessun valore di } h \text{ verifica il sistema}$$

e quindi si ha assoluta stabilità per $h < \frac{1}{|\lambda|}$.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo predictor-corrector

$$
\begin{aligned}
& u_0 = y_0 \\
& \text{for } i = 1, \dots, N-1 \\
& \quad u^*_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}) \\
& \quad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{12}(5f^*_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})
\end{aligned}
$$

per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \,, \end{cases}
$$

dove $h = T/N$, $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, 1, \dots, N$, $f_i = f(t_i, u_i)$ e $f^*_{i+1} = f(t_{i+1}, u^*_{i+1})$.
Per inizializzare il metodo predictor-corrector usare il seguente metodo di Runge-Kutta:

$$
\begin{aligned}
& u_0 = y_0 \\
& \text{for } i = 0, \dots, N-1 \\
& \quad K_1 = f(t_i, u_i) \\
& \quad K_2 = f(t_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{h}{2}K_1) \\
& \quad K_3 = f(t_i + h, u_i + h(-K_1 + 2K_2)) \\
& \quad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{6}(K_1 + 4\,K_2 + K_3)
\end{aligned}
$$