COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

FIRMA [ ]

Analisi Numerica I - Secondo appello a.a. 2016–2017

10 febbraio 2017

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1. Dire per quali valori di α e β il metodo del gradiente coniugato converge.
2. Fissato $\alpha = 0$, dire per quali valori di β i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.
3. Si risolva con il metodo di Thomas il sistema ottenuto ponendo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

Esercizio 2

Si vuole approssimare con il metodo di Cavalieri-Simpson il seguente integrale:

$$I(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

1. Si determini il numero minimo di intervalli in cui suddividere l'intervallo di integrazione per ottenere un errore minore di 10^-2.
2. Si calcoli l'integrale con i dati del punto precedente e l'errore effettivamente commesso, utilizzando 6 cifre per il calcolo.

Esercizio 3

Si consideri il seguente schema numerico

$$u_{n+1} = (\alpha^2 - 2\beta^2)u_n + \beta u_{n+1} + h\left[(\alpha+1)f(t_n, u_n) + \beta f(t_{n+1}, u_{n+1})\right], \tag{1}$$

con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0\,, \end{cases}$$

1. Trovare per quali valori di α e β il metodo risulta consistente e l'ordine di consistenza.
2. Per il metodo ottenuto per il valore di $\alpha > 0$, si studino le condizioni di assoluta stabilità.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo predictor-corrector

$$
\begin{aligned}
& u_0 = y_0 \\
& \text{for } i = 1, \ldots, N-1 \\
& \quad u^*_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}) \\
& \quad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{12}(5f^*_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})
\end{aligned}
$$

per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \,, \end{cases}
$$

dove $h = T/N$, $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, 1, \ldots, N$, $f_i = f(t_i, u_i)$ e $f^*_{i+1} = f(t_{i+1}, u^*_{i+1})$.
Per inizializzare il metodo predictor-corrector usare il seguente metodo di Runge-Kutta:

$$
\begin{aligned}
& u_0 = y_0 \\
& \text{for } i = 0, \ldots, N-1 \\
& \quad K_1 = f(t_i, u_i) \\
& \quad K_2 = f(t_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{h}{2}K_1) \\
& \quad K_3 = f(t_i + h, u_i + h(-K_1 + 2K_2)) \\
& \quad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{6}(K_1 + 4\,K_2 + K_3)
\end{aligned}
$$