COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

FIRMA ______

Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2016–2017
Correzione
13 gennaio 2017

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Dimostrare che la matrice dei coefficienti è definita positiva.
2. Risolvere il sistema con il metodo di Cholesky.

Risoluzione

1. Tre modi per dimostrare che la matrice A è definita positiva:
   (a) I minori principali sono positivi: $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, $A_3 = \det(A) = 4 \;\Rightarrow\; OK$
   (b) Per definizione $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0,\ \forall \mathbf{x} \neq 0$:
   $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 > 0,\ \forall \mathbf{x} \neq 0 \;\Rightarrow\; OK$
   (c) Gli autovalori sono tutti positivi: $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)[(\lambda - 2)^2 - 2] = 0$ da cui si ha $\lambda_1 = 2 > 0,\quad \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2} > 0 \;\Rightarrow\; OK$

2. Matrice A tridiagonale $\Rightarrow$ triangolo della fattorizzazione di Cholesky bidiagonale. Precisamente, se $A = H^T H$, si ha:

$$h_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}},$$
$$h_{i-1,i} = \frac{a_{i-1,i}}{h_{i-1,i-1}}, \quad h_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - h_{i-1,i}^2} \qquad i = 2, 3.$$

E sostituendo si ottiene:

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Soluzione dei due sistemi lineari triangolari:

$$H\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T$$

$$H^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x} = (1 \;\; 0 \;\; -1)^T$$

Esercizio 2

1. Sia $p > 1$; si vuole calcolare la radice positiva dell'equazione

$$x^2 + px = 1, \tag{3}$$

senza utilizzare l'operazione radice quadrata. Dimostrare che l'algoritmo seguente:

$$x^{(0)} = \frac{1}{p}, \qquad x^{(k+1)} = \frac{1}{p + x^{(k)}}, \quad k \geq 0, \tag{4}$$

converge alla radice cercata e determinare l'ordine di convergenza.

2. Posto $p = 2$, si eseguano le prime 5 iterazioni del metodo (4) utilizzando 5 cifre per il calcolo. Si stimi il fattore asintotico di convergenza.

Risoluzione

1. Il polinomio $P(x) = x^2 + px - 1$ ha la sua radice positiva in $[0, 1]$ in quanto $P(0) = -1 < 0$ e $P(1) = p > 0$. La funzione $\Phi(x) = \frac{1}{p+x}$ è decrescente e $\Phi(0) = \frac{1}{p}$ e $\Phi(1) = \frac{1}{(p+1)}$, entrambi valori compresi tra 0 e 1. Di conseguenza:
$\Phi : [0, 1] \to [\frac{1}{(p+1)}, \frac{1}{p}] \subset [0, 1]$.
Inoltre, $|\Phi'(x))| = \frac{1}{(p+x)^2} \leq \frac{1}{p^2} < 1, \ \forall x \in [0, 1]$ Quindi per il teorema di convergenza delle iterazioni di punto fisso, il metodo (4) converge $\forall x^{(0)} \in [0, 1]$ e in particolare per $x^{(0)} = \frac{1}{p}$.
L'ordine di convergenza è 1 essendo $|\Phi'(x)| \neq 0, \ \forall x \in [0, 1]$ e quindi anche nel punto fisso.

2. Posto $p = 2$, si ha

$$x^{(0)} = 0.5, x^{(k+1)} = \frac{1}{2 + x^{(k)}}, \quad k \geq 0$$

da cui, operando con 5 cifre, si ricava:
$x^{(1)} = \frac{1}{2+x^{(0)}} = 0.40000,$
$x^{(2)} = \frac{1}{2+x^{(1)}} = 0.41667,$
$x^{(3)} = \frac{1}{2+x^{(2)}} = 0.41379,$
$x^{(4)} = \frac{1}{2+x^{(3)}} = 0.41429,$
$x^{(5)} = \frac{1}{2+x^{(4)}} = 0.41420,$

e $|\Phi'(\alpha)| \approx \left|\frac{x^{(5)} - x^{(4)}}{x^{(4)} - x^{(3)}}\right| = 0.17910$, essendo α il punto fisso di $\Phi(x)$, ovvero la radice positiva di (3).

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo multistep

$$u_{n+1} = \frac{\alpha}{2}u_n + \beta u_{n-1} + h[\alpha f(t_n, u_n) + (\alpha + \beta) f(t_{n-1}, u_{n-1})] \tag{5}$$

1. Trovare i valori di α e β per cui il metodo risulta consistente.
2. Trovare l'ordine del metodo.
3. Verificare se è zero-stabile.

Risoluzione Il metodo assegnato è un metodo multistep esplicito a due passi con

$$a_0 = \frac{\alpha}{2}, \quad a_1 = \beta; \qquad b_{-1} = 0, \quad b_0 = \alpha, \quad b_1 = \alpha + \beta$$

1. Consistenza:

$$a_0 + a_1 = \frac{\alpha}{2} + \beta = 1, \qquad -a_1 + b_0 + b_1 = 2\alpha = 1$$

   da cui si ricava: $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{3}{4}$ e il metodo diventa:

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}u_{n-1} = h\left[\frac{1}{2}f(t_n, u_n) + \frac{5}{4}f(t_{n-1}, u_{n-1})\right] \tag{6}$$

2. Ordine:

$$a_1 + 2(-b_1) = \frac{13}{4} \neq 1$$

   e quindi ordine $q = 1$.

3. Zero-stabilità:
   Verifica condizione radici.

$$\rho(r) = r^2 - a_0 r - a_1 = r^2 - \frac{1}{4}r - \frac{3}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow r_0 = 1, \quad r_1 = -\frac{3}{4}$$

   Essendo $|r_1| < 1$, il metodo è zero-stabile.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi la forma composita della formula di Gauss a tre punti

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{3/5})$$

per l'approssimazione di

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

La funzione deve ricevere in ingresso la funzione integranda f, gli estremi dell'intervallo d'integrazione a e b e il numero di sottointervalli da considerare nella forma composita. Deve restituire il valore approssimato dell'integrale.

Risoluzione Per un generico intervallo $[c, d]$, si ha che il cambiamento di variabili dall'intervallo $[-1, 1]$ è dato da

$$x = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}t$$

e quindi

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}t\right)\,dt$$

$$\approx \frac{d-c}{2}\left[\frac{5}{9}f\left(\frac{c+d}{2} - \frac{d-c}{2}\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9}f\left(\frac{c+d}{2}\right) + \frac{5}{9}f\left(\frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}\sqrt{3/5}\right)\right]\,.$$

Sia $H = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + H\,i$ con $i = 0, \ldots, N$ e $[x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, \ldots, N$,il generico sotto-intervallo in cui applicare la formula composita. Sia $m_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ il punto medio dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{H}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{-1}^{1} f(m_i + Ht)\,dt$$

$$\approx \frac{H}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{5}{9}f(m_i - \frac{H}{2}\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}f(m_i) + \frac{5}{9}f(m_i + \frac{H}{2}\sqrt{3/5})\right]\,.$$