COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

FIRMA ______

Analisi Numerica I - Primo appello a.a. 2016–2017

13 gennaio 2017

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Dimostrare che la matrice dei coefficienti è definita positiva.
2. Risolvere il sistema con il metodo di Cholesky.

Esercizio 2

1. Sia $p > 1$; si vuole calcolare la radice positiva dell'equazione

$$x^2 + px = 1,$$

senza utilizzare l'operazione radice quadrata. Dimostrare che l'algoritmo seguente:

$$x^{(0)} = \frac{1}{p}, \qquad x^{(k+1)} = \frac{1}{p + x^{(k)}}, \quad k \geq 0, \tag{1}$$

converge alla radice cercata e determinare l'ordine di convergenza.

2. Posto $p = 2$, si eseguano le prime 5 iterazioni del metodo (1) utilizzando 5 cifre per il calcolo e si stimi il fattore asintotico di convergenza.

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo multistep lineare

$$u_{n+1} = \frac{\alpha}{2}u_n + \beta u_{n-1} + h[\alpha f(t_n, u_n) + (\alpha + \beta)f(t_{n-1}, u_{n-1})] \tag{2}$$

1. Trovare i valori di α e β per cui il metodo risulta consistente.
2. Trovare l'ordine del metodo.
3. Quando il metodo risulta consistente, verificare se è zero-stabile.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi la forma composita della formula di Gauss a tre punti

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{3/5})$$

per l'approssimazione di

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx\,.$$

La funzione deve ricevere in ingresso la funzione integranda f, gli estremi dell'intervallo d'integrazione a e b e il numero di sotto-intervalli da considerare nella forma composita. Deve restituire il valore approssimato dell'integrale.
Suggerimento Nel passaggio dall'integrale da $[-1, 1]$ ad un generico intervallo $[c, d]$, si consideri il cambio di variabile: $x = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2} t$.