Analisi Numerica I - Quinto appello a.a. 2015–2016
05 settembre 2016

CORREZIONE

Esercizio 1

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- Con il metodo di eliminazione di Gauss, con pivot per righe applicato ad ogni passo, in modo che l'elemento di pivot sia

$$a_{p.k}^{(k)} \quad \text{t. c.} \quad |a_{p.k}^{(k)}| = \max_{i=k,\dots,n} |a_{i.k}^{(k)}| \quad p = k,\dots,n$$

  si calcolino L, matrice dei moltiplicatori con diagonale unitaria, $U = A^{(3)}$ e P, matrice di permutazione.

- Calcolare il determinante di A mediante il calcolo dei determinanti di L, P e U.

Risoluzione

i) Primo passo del metodo di Gauss: permuto prima riga con seconda:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora:
$m_{21} = 0$, da cui segue che $a_{2,j}^{(2)} = a_{2,j}^{(1)}$, $j = 2, 3$
$m_{31} = -\frac{1}{2}$, da cui segue che $a_{3,2}^{(2)} = 3$, $a_{3,2}^{(2)} = \frac{3}{2}$.

Secondo passo:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora: $m_{32} = \frac{1}{3}$, $a_{3.3}^{(3)} = \frac{3}{2}$

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}; \qquad P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) $PA = LU$ da cui $A = PLU$ e quindi

$$\det(A) = \det(P) \cdot \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot 1 \cdot \left[(-2)(3)(\frac{3}{2}) \right] = -9.$$

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad x \in [a,b] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

1. Dire per quali valori iniziali $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ il metodo delle corde

   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{2} \qquad k \geq 0$$

   converge alla radice α.

2. Scelto $x_0 = \frac{1}{2}$, calcolare tre iterazioni del metodo, utilizzando 4 cifre significative per il calcolo.

Risoluzione

1. L'unica radice della funzione data è $\alpha = 0$ per le proprietà della funzione logaritmo.
   Il metodo delle corde è un metodo di iterazioni di punto fisso in cui $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{2}$.

   Si ha: $-1/2 < \Phi(-1/2) \approx -0.15 < \Phi(1/2) \approx 0.3 < 1/2$.

   La derivata prima $\Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{2} = 1 - \frac{1}{2(x+1)}$ è tale che $0 \leq \Phi'(x) < 1$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$e in quanto

   $$0 \leq 1 - \frac{1}{2(x+1)} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq -\frac{1}{2(x+1)} < 0.$$

   disuguaglianze sono sempre vere per $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Quindi:
   essendo $\Phi(x)$ non decrescente,

   $$\begin{array}{l} \Phi : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ |\Phi'(x|) < 1, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{array} \Longrightarrow \text{le iterazioni di punto fisso convergono } \forall x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

2. $x_0 = \frac{1}{2}$
   $x_1 = x_0 - \frac{ln x_0 + 1}{2} = 0.5 - \frac{ln(0.5+1)}{2} = 0.2972$
   $x_2 = x_1 - \frac{ln x_1 + 1}{2} = 0.2972 - \frac{ln(0.2972+1)}{2} = 0.1671$
   $x_3 = x_2 - \frac{ln x_2 + 1}{2} = 0.1671 - \frac{ln(0.1671+1)}{2} = 0.08985$

Esercizio 3

1. Dimostrare che il seguente metodo di Runge-Kutta

   $$\begin{cases} K_1 = hf(t_n, u_n) \\ K_2 = hf(t_n + 2h/3, u_n + 2K_1/3) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(K1 + 3K2) \end{cases} \tag{2}$$

   è di ordine $p = 2$ e si trovino le condizioni di assoluta stabilità..

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty^2 \quad t > -1/2 \\ y(-1/2) = 4/3, \end{cases} \tag{3}$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{1}{t^2-1}$. Utilizzando il metodo (**??**) con $h = 0.25$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta e l'errore commesso in $t = 0$ utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Risoluzione

1. • Ordine $p = 2$. Due modi:

   a) Si osserva che il metodo dato è di tipo Runge-Kutta con $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{3}{4}$, $c_1 = 1$ e $c_2 = \frac{2}{3}$, per cui si ha:

   $$b_1 + b_2 = 1 \qquad b_2c_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

   Le condizioni appena scritte garantiscono che il metodo è consistente con ordine di consistenza almeno $p = 2$. Un terorema ssicura che un metodo a s stadi non può avere ordine maggiore di s. Quindi il metodo è di ordine $p = 2$.

   b) Si calcola l'errore di troncamento e dimostrare che tende a 0 come h^2.

   • Assoluta stabilità: si ha quando la soluzione del problema modello

   $$y'(t) = \lambda y(t), \quad 0 < t \leq T \quad \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) < 0; \qquad y(0) = 1$$

   tende a zero al tendere di T all'infinito.

   Due modi:

   a) si sfrutta la teoria e si sa che tutti i metodi di Runge-Kutta a due stadi del secondo ordine hanno come condizione di assoluta stabilità la relazione

   $$\left| \frac{(h\lambda)^2}{2} + h\lambda + 1 \right| < 1$$

   b) si applica il metodo al problema modello, si effettuano le dovute sostituzione e si arriva alla stessa condizione del caso a).

2. Per il problema (**??**), il metodo (**??**) diventa:

$$\begin{cases} K_1 = ht_nu_n^2 \\ K_2 = h(t_n + 2h/3)(u_n + 2K_1/3)^2 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(K1 + 3K2) \\ u_0 = 4/3 \end{cases} \tag{4}$$

con $t_0 = -1/2$, $t_1 = -1/4$ e $t_2 = 0$. Si devono quindi compiere due passi del metodo e calcolare u_2.

n	t_n	u_n	K_1	$t_n + 2h/3$	$u_n + 2K_1/3$	K_2	t_{n+1}	u_{n+1}
0	$-.5$	1.3333	$-.22222$	$-.33333$	1.1852	$-.11705$	-0.25	1.19
1	$-.25$	1.19	-0.088506	$-.083333$	1.1310	-0.026648	**0**	**1.1479**

Dalla tabella si legge che $y(0) \approx \ u_2 = 1.1479$ e l'errore commesso $y(0) - u_2 = 0.1479$.

.

.

.

.