COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

FIRMA ______

Analisi Numerica I - Quinto appello a.a. 2015–2016
05 settembre 2016

Esercizio 1

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

1. Con il metodo di eliminazione di Gauss con pivot per righe, applicato ad ogni passo in modo che l'elemento di pivot sia

$$a_{p.k}^{(k)} \quad \text{t. c.} \quad |a_{p.k}^{(k)}| = \max_{i=k,\dots,n} |a_{i.k}^{(k)}| \quad p = k, \dots, n$$

   si calcolino L, matrice dei moltiplicatori con diagonale unitaria, $U = A^{(3)}$ e P, matrice di permutazione.

2. Calcolare il determinante di A mediante il calcolo dei determinanti di L, P e U.

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad x \in [a,b] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

1. Dire per quali valori iniziali $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ il metodo delle corde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{2} \qquad k \geq 0$$

   converge alla radice α.

2. Scelto $x0 = \frac{1}{2}$, calcolare tre iterazioni del metodo, utilizzando 4 cifre significative per il calcolo.

Esercizio 3

1. Dimostrare che il seguente metodo di Runge-Kutta

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_n, u_n) \\ K_2 = hf(t_n + 2h/3, u_n + 2K_1/3) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(K1 + 3K2) \end{cases} \tag{2}$$

è di ordine $p = 2$ e si trovino le condizioni di assoluta stabilità..

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty^2 \quad t > -1/2 \\ y(-1/2) = 4/3, \end{cases} \tag{3}$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{1}{t^2-1}$. Utilizzando il metodo (2) con $h = 0.25$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta e l'errore commesso in $t = 0$ utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Esercizio 4

Scrivere una FUNZIONE di Matlab di nome `pfisso` che implementi l'iterazione di punto fisso

$$\begin{array}{l} x_0 \text{ assegnato} \\ \text{Per } n \geq 0 \\ \quad x_{n+1} = f(x_n)\,. \end{array}$$

a) La funzione deve ricevere in ingresso una funzione `fun`, un valore iniziale `x0` e il numero massimo d'iterazioni da fare `nmax`, e restituire in uscita l'ultimo valore x_{n+1} calcolato e il numero d'iterazioni fatte.

b) Il metodo iterativo si deve fermare se si raggiunge il numero massimo d'iterazioni (`nmax`) oppure quando il valore assoluto della differenza fra due iterate consecutive sia minore di 10^{-8}.