Analisi Numerica I - Quarto appello a.a. 2015–2016
04 luglio 2016
CORREZIONE

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Si calcolino gli insiemi dei valori di α per cui i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono;

ii) Per $\alpha = 2$ si eseguano tre iterazioni del metodo di Jacobi, assumendo come vettore iniziale il vettore identicamente nullo.

Risoluzione

i) Essendo la matrice data tridiagonale, i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono per gli stessi valori di α, essendo $\rho(B_{GS} = \rho(B_J)$. Di conseguenza, basta trovare le condizioni di convergenza per uno solo dei due metodi. Si osservi subito che per $\alpha = 0$ i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel non si possono definire in quanto la matrice risultante ha un elemento diagonale nullo. Quindi si ha la prima condizione $\alpha \neq 0$. Per il metodo di Jacobi la matrice di iterazione è data da:

$$B_J = D^{-1}(I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/\alpha & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

Gli autovalori di B_J sono gli zeri del polinomio:

$$del(\lambda I - B_J) = \lambda(\lambda^2 - 1/\alpha).$$

da cui si ha che il metodo di Jacobi (e di Gauss-Seidel) converge se e solo se

$$\rho(B_J) = \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\alpha| > 1$$

ii) Per $\alpha = 2$, la generica iterazione del metodi di Jacobi risulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= B_J \mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 x_2^{(k)} + 1/2 \\ 1/2 x_1^{(k)} + 1/2 x_3^{(k)} + 1/2 \\ 1/2 x_2^{(k)} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$, si ha

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 5/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 9/8 \\ 3/2 \\ 13/8 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Calcolare la spline cubica naturale che interpola i seguenti dati:

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	0	1	-1

Risoluzione Essendo assegnati 4 punti, si ha $n = 3$ e che $h_i = 1\ \forall i = 0, \ldots, n-1$, per calcolare la spline è necessario innanzitutto impostare e risolvere il sistema

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = 6 * (y_{i-1} + y_i + y_{i+1}) \qquad i = 1, \ldots, 2$$

e poi scrivere le espressioni dei polinomi di grado 3:

$$S_i(x) = \frac{M_{i+1}}{6}(x - x_i)^3 - \frac{M_i}{6}(x - x_{i+1})^3 + \left[(y_{i+1} - y_i) - \frac{M_{i+1} - M_i}{6}\right](x - x_i) + y_i - \frac{M_i}{6}.$$

per $x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad i = 0, \ldots, 2.$

Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 = (1 - 2 \cdot 0 + 1) * 6 = 12 \\ M_1 + 4M_2 = (0 - 2 \cdot 1 - 1) * 6 = -18 \end{cases}$$

Per cui i valori delle derivate seconde nei nodi risultano:

$$M_0 = 0 \quad M_1 = 22/5 \quad M_2 = -28/5 \quad M_3 = 0$$

La funzione spline risulta:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{11}{15}(x+1)^3 - \left(1 + \frac{11}{15}\right)(x+1) + 1 & x \in [-1, 0] \\ S_1(x) = -\frac{14}{15}x^3 - \frac{11}{15}(x-1)^3 + \left(1 + \frac{5}{3}\right)x - \frac{11}{15} & x \in [0, 1] \\ S_2(x) = \frac{28}{5}(x-2)^3 - \left(2 + \frac{28}{5}\right)(x-1) + \frac{33}{5} & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Esercizio 3

1. Dimostrare che il metodo di Eulero modificato

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_n, u_n) \\ K_2 = hf(t_n + h/2, u_n + K_1/2) \\ u_{n+1} = u_n + K2 \end{cases} \tag{2}$$

   è di ordine $p = 2$.

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty^2 \quad t > -1/2 \\ y(-1/2) = 4/3, \end{cases} \tag{3}$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{1}{t^2-1}$. Utilizzando il metodo (2) con $h = 0.25$, si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta in $t = 0$ e l'errore commesso utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Risoluzione

1. Il mtodo proposto è un metodo di Runge-Kutta del tipo:

$$\begin{aligned} &K_1 = hf(t_n, u_n) \\ &K_2 = hf(t_n + c_2 h, u_n + c_2 K_0) \\ &u_{n+1} = b_1 K_0 2 + b_2 K_2 \end{aligned} \tag{4}$$

con

$$c_2 = \frac{1}{2} \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1.$$

Un metodo di Runge-Kutta a due passi è consistente di ordine 2 se sono vere le seguenti condizioni:

$$b_1 + b_2 = 1 \quad b_2 c_2 = \frac{1}{2}.$$

Queste condizioni sono verificate per il metodo proposto. Di conseguenza il metodo è di ordine p=2.

In alternativa, si può calcolare l'errore di troncamento e verificare che è un infinitesimo di ordine 2. Sostituendo le espressioni di K_1 e K_2 nella definizione del metodo e utilizzando lo sviluppo di Taylor in due variabili si ha:

$$\begin{aligned} u^*_{n+1} &= y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{K_0}{2}) = \\ &= y_n + h[f(t_n, u_n) + \frac{h}{2} f_t(t_n, u_n) + \frac{h}{2} f(t_n, u_n) f_y(t_n, u_n) + \frac{h^2}{8} ... \\ &= y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{8} y'''_n + O(h^4) \\ y_{n+1} &= {}_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} hy''_n + O(h^4) \end{aligned}$$

L'errore di troncamento risulta:

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y_{n+1} - u^*_{n+1}}{h} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) y'''_n h^2 + O(h^3) = O(h^2)$$

c.v.d.

2. $n = 0$
$K_1 = hf(t_0, u_0) = 0.25 \cdot (-0.5) \cdot (1.3333)^2 = -0.22222$
$K_2 = hf(t_0 + h/2, u_0 + K_1/2) = 0.25 \cdot (-0.375) \cdot (1.2222)^2 = 0.14005$
$u_1 = u_0 + K_1 = 1.3333 - 0.14004 = 1.1933$

$n = 1$
$K_1 = hf(t_1, u_1) = 0.25 \cdot (-0.25) \cdot (1.1933)^2 = -0.088998$
$K_2 = hf(t_1 + h/2, u_1 + K_1/2) = 0.25 \cdot (-0.125) \cdot (1.1933 - 0.088998/2)^2 = -0.041242$
$u_2 = u_1 + K_1 = 1.1933 - 0.041242 = 1.1521$

$errore = |y(0) - u_2| = |1 - 1.1521| = 0.1521$

Un possibile modo alternativo di eseguire i calcoli era quello di sostituire $K1$ e $K2$ nell'espressione di u_{n+1} ottenendo:

$$u_{n+1} = u_n + K_2 = u_n + hf(t_n + h/2, u_n + K_1/2) = u_n + hf(t_n + h/2, u_n + hf(t_n, u_n)/2).$$

Sostituendo ora l'espressione della funzione $f(t, y)$ si ottiene:

$$u_{n+1} = u_n + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\left(u_n + \frac{h}{2}t_n u_n^2\right)^2.$$

A questo punto basta procedere con le sostituzione dei valori numerici.

Esercizio 4

Si consideri il seguente tipo di problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)\, y(t) & t \in (t_0, t_0 + T) \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases}$$

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Eulero implicito per l'approssimazione della soluzione di questo tipo di problemi di Cauchy.

Risoluzione

Il metodo di Eulero all'indietro per la famiglia di metodi considerata si scrive nel modo seguente:

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n + hg(t_{n+1})u_{n+1}$$

dacie, esplicitando i u_{n+1}, si ricava:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - hg(t_{n+1})}$$